MATEBLOQUEMÁTICA:
Parte II
El álgebra

La forma de aprender matemáticas
haciéndose la vida de cuadritos

Eduardo Mancera Martínez

Introducción

En la primera parte de esta serie, dedicada al uso de los bloques de Dienes en la educación matemática, se trata de evitar la idea de que aprender matemáticas es algo complicado y reservado para quienes poseen cualidades especiales.

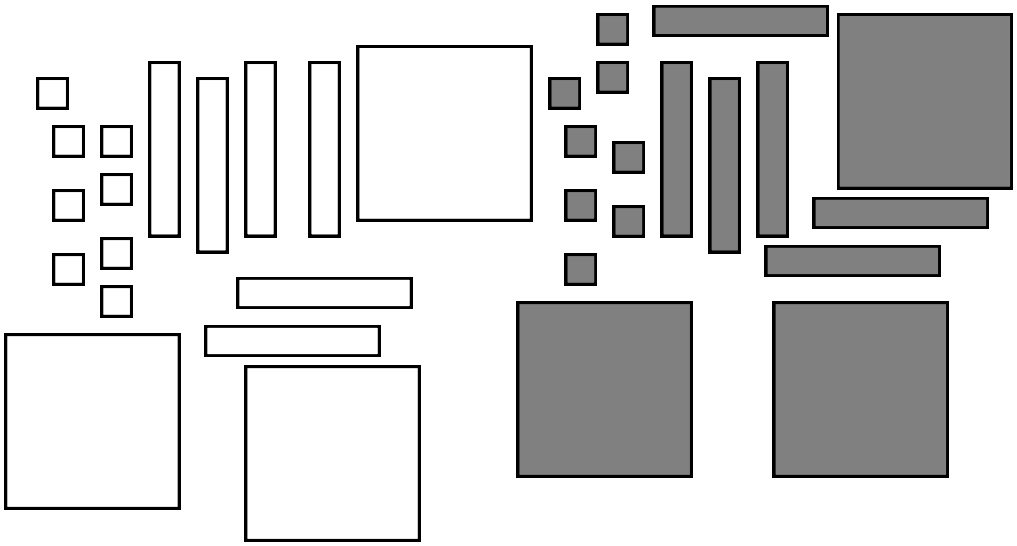
INCLUIR FIGURA ALUSIVA

En la parte I de matebloquemática, dedicada a la aritmética vimos como los manipulativos, en particular, los bloques de Dienes pueden ayudar a introducir nociones y procedimientos complejos y que si no son la panacea, pueden ayudar a motivar al estudiantes y hacerles menos difícil el aprendizaje de las matemáticas.

En esta parte vamos a desarrollar muchos contenidos de álgebra elemental, la que se cursa en la enseñanza media (secundaria y bachillerato).

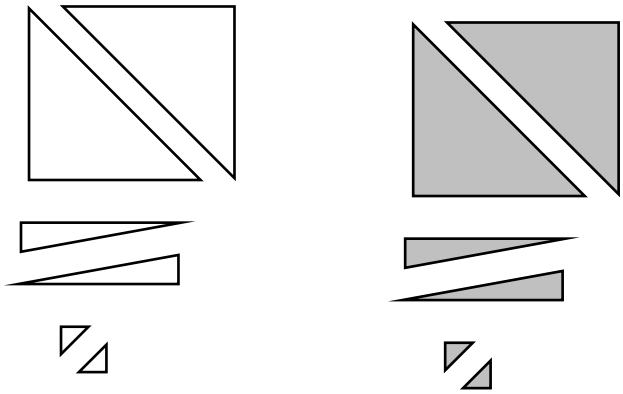
Vale la pena insistir que el trabajo con los bloques de Dienes no podrá substituir la labor en el aula y el uso de otros procedimientos de enseñanza, pero si pueden ayudar en las etapas iniciales de construcción del conocimiento.

Los manipulativos que emplearemos constan de varios cuadrados grandes y pequeños y regletas de ciertas dimensiones:



Recordemos que unas de las denominaciones comerciales para este tipo de materiales es la de “Algebra Tiles” o se pueden encontrar otras versiones con más posibilidades como los “Algeblocks”.

En diversas partes utilizaremos una variante de estos materiales que se contruyen a partir de los mismos bloques seccionándolos por la mitad:



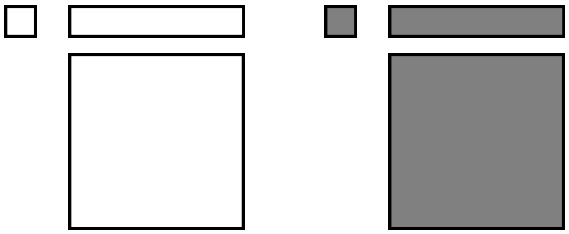
En esta parte exploraremos las potencialidades de los bloques de Dienes para abordar situaciones de enseñanza referidas al álgebra elemental, contenido relevante de la educación básica.

El maestro puede elaborar sus propios Bloques de Dienes con diversos materiales y considerando las dimensiones adecuadas que más le acomoden. Pueden diseñar sus Bloques con acrílico para ser utilizados con un retroproyector, con cartulina américa y fragmentos de tiras imantadas si se utiliza un pizarrón magnético, con cartón y lijas u otros materiales para usarlos con una franela.

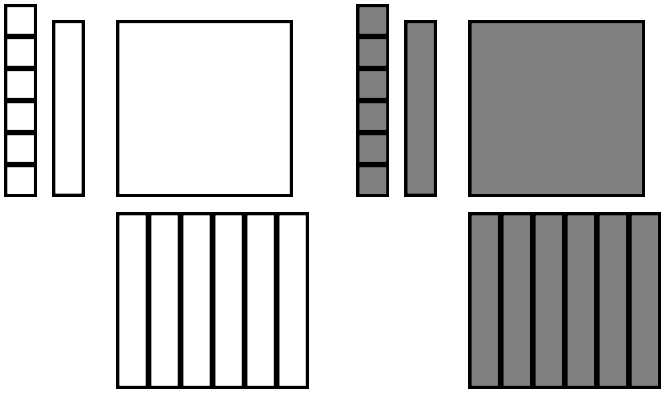
Los alumnos los pueden elaborar con cartulinas, madera, plásticos u otro tipo de materiales.

Ya existen versiones para el maestro y el alumno en el mercado que pueden adquirirse en diversas casas comerciales.

Para construir los propios Bloques de Dienes es importante hacer notar que el lado del cuadrado pequeño es uno de los lados de las regletas (rectángulos) y el otro lado de éstas es el lado del cuadrado mayor:



Otro detalle importante es que con los cuadrados pequeños no se puede cubrir de manera exacta el largo de las regletas ni con éstas se puede cubrir de manera exacta los lados del cuadrado grande.



Con el uso de estos materiales puede beneficiarse la labor docente, pero hay que tener en cuenta que para lograr algún beneficio es importante que se realice un proceso de planeación y supervisión de lo que se lleva a cabo.

Los materiales por sí solos no producen ningún efecto importante, la influencia de quien los aplica es lo que los hace útiles.

Por ello, se recomienda:

- Monitorear constantemente lo que trabajan los estudiantes.
- Planear cuidadosamente cada sesión de trabajo con los materiales. La improvisación en este tipo de experiencias por lo general provoca experiencias frustrantes.
- Estar atento a los planteamientos de los alumnos. Hay que escuchar con detenimiento lo que plantean los estudiantes porque ello permitirá interpretar adecuadamente sus dudas o reflexiones.
- Manejar estrategias de enseñanza flexibles. Es decir, sin caer en el desorden, permitir el trabajo en equipos orientando las discusiones de éstos. Permitir que los estudiantes se apoyen o corrijan unos a otros. En suma, abandonar la posición del maestro autoritario y totalmente directivo.
- Permitir la participación de los estudiantes, sin importar si se equivocan o proceden de manera correcta, el maestro corregirá lo necesario.
- Dosificar adecuadamente los temas del programa por cubrir para dar el espacio requerido al uso de materiales.

El uso de cualquier tipo de materiales implica un cambio en la enseñanza, como se dijo, usarlos no es una fórmula mágica. Son apoyos disponibles para quienes deseen dar un giro a su actividad docente cotidiana, pero no son el substituto de nada.

El interés de este trabajo es mostrar algunos elementos para apoyar una fase del desarrollo conceptual en el álgebra y que sea éste el punto de partida para propiciar el manejo operativo.

Es mejor contar con recursos para que los alumnos construyan algunos elementos por sí mismos y den sentido a lo que se les enseña, esto es útil en el futuro porque ante el olvido irremediable se contarán con estrategias para reconstruir un proceso o un concepto, sabemos que no podemos confiar sólo en la memoria. Si alguien no recuerda cierta fórmula o procedimiento, pero sabe bien a lo que refiere, podrá generar ideas para utilizar procedimientos alternos o resolver satisfactoriamente las situaciones que enfrenta, lo cual puede propiciarse con el uso de los manipulativos.

Supuestos constructivistas

En la primera parte se desarrollaron, de manera intuitiva, algunas ideas básicas de ciertas corrientes constructivistas. En esta parte sólo se hará mención de algunos supuestos importantes en el manejo de los manipulativos. Aunque ello siempre trae consigo posibles interpretaciones inadecuadas que pueden corregirse al profundizar en las diferentes corrientes.

El **conocimiento se construye**, los conceptos y procedimientos no se "aprenden" de manera instantánea y para siempre; no se "aprenden" de manera definitiva y permanecen estables en nuestra mente.

La palabra "aprendizaje", por lo general, se asocia a un proceso en el cual se considera que los conocimientos están por ahí y de repente, por alguna situación, nos percatamos de su existencia y nos apropiamos de ellos, los tomamos para sí de manera completa; cuando se hace referencia a la "construcción de conocimientos", se indica un proceso en el que se forman ideas o imágenes mentales de los conceptos, pero sólo son aproximaciones, no es un proceso concluyente.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

El concepto de variable no se adquiere instantáneamente, es parte de un proceso de maduración de ideas sobre la variación, las representaciones de las cantidades, algo que se procesa durante períodos largos de tiempo y cada vez que se profundiza en éste se encuentran aspectos nuevos. La historia de la matemática ofrece varios ejemplos sobre este punto.

Renovamos constantemente lo que hemos aprendido y lo vamos enriqueciendo con otras experiencias. La nociones se van reformulando con

el tiempo y de acuerdo a lo que nos acontece. Esto sucede incluso con nociones que consideramos básicas y que se pueden considerar sencillas.

Se puede decir que nos acercamos al conocimiento por aproximaciones sucesivas, en un camino en el que no necesariamente se tienen avances, pueden suceder también retrocesos.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

Imaginemos esta situación como la construcción de un rompecabezas con muchas piezas, en cierto momento, aún sin terminar, podemos conjeturar como será la forma final, pero nos faltan piezas por acomodar para constatar lo que suponemos.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

Tenemos una idea de lo que se tiene que lograr pero no necesariamente es correcta, esta idea será mejor a medida que se coloquen correctamente otras piezas.

Los conceptos se construyen por medio de procesos en los que intervienen acciones y la conformación de imágenes mentales sobre lo que sucede. Es muy conocido el refrán popular que sentencia que *una imagen dice más que mil palabras*. Para nuestros propósitos es importante reconocer que si un conocimiento se asocia previamente con una imagen es más posible que el estudiante pueda reconocerlo, pero sobre todo pueda darle sentido.

En la matemática, disciplina caracterizada por sus conceptos abstractos, es indispensable pasar de un contacto con situaciones en las que el estudiante pueda realizar algunas indagaciones y formular sus propias ideas sobre lo que sucede, antes de arribar a la simbolización y el manejo abstracto. Es como si para llegar al conocimiento abstracto se pasara por diversos planos conceptuales en los que el alumno va conformando imágenes mentales de los conceptos, hasta llegar a entender las convenciones en simbología y procedimientos que se adoptan en la teoría.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

Si es posible, es importante que los alumnos realicen actividades con materiales que puedan "manipular" y que tengan reglas sencillas de manejo, de tal modo que el maestro pueda diseñar actividades con ellos y el estudiante pueda ir conformando las nociones que interesa abordar.

No es un aspecto sencillo, realmente es complicado, pero no imposible y a fin de cuentas es la labor que constantemente se enfrenta en la docencia.

Podemos plantear una serie de etapas a seguir, sin que estas sean rígidas, solo se plantean para mostrar el tipo de acciones docentes que se requieren antes de iniciar con los conocimientos abstractos.

Es una forma de sistematizar una forma de trabajo, cada maestro deberá construir la propia:

- ***Acción espontánea***

  Se le proporcionan los materiales a los estudiantes para que los conozcan, se familiaricen con ellos y vean que relación guardan las partes que los conforman.

  En este nivel se maneja el lenguaje coloquial y no se asocian las piezas de los manipulativos a ninguna noción.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

  Es un nivel de exploración centrada en el material y sus características.

- ***Acción indagadora***

  Se asignan ciertos significados a los materiales y se permite que el estudiante experimente con éstos para verificar algunas conjeturas sencillas y casi evidentes.

  En este nivel el lenguaje para referirse a lo que sucede se hace también a través del lenguaje cotidiano sin establecer muchas restricciones en términos.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

Es un nivel de acción en la que se tienen intenciones claras, resaltar, sin decirlo algunas relaciones.

- ***Acción intensionada***

  Se complican después las relaciones y se plantean situaciones no tan obvias, existe la intención de provocar el descubrimiento de relaciones no evidentes.

  En este caso el lenguaje y la simbología empieza a tener cierta importancia y no se maneja tan libremente, se inicia la incorporación de algunas convenciones simbólicas.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

Es un nivel de acción como el anterior, pero con el propósito claro de abordar ciertas relaciones.

- ***Acción conjetural***

  Después de haber realizado ciertas actividades para propiciar el hallazgo de relaciones importantes se pasa a un nivel de exploración más intenso en el cual se plantean conjeturas claras.

  Dichas conjeturas se plantean con un lenguaje simbólico y técnico más intenso, se trata de inducir el uso de un lenguaje o "jerga" propia de los asuntos correspondientes.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

Es un nivel de acción que implica el análisis de lo que ocurre.

- ***Acción contrastativa***

Posteriormente, se trata de valorar las conjeturas que se han establecido y buscar argumentos para apoyar su validez general. Lo que se ha conjeturado se pone a prueba varias veces y considerando varias posibilidades para convencese a sí mismo de lo que ocurre y ayudar a convencer a otros.

Aquí el lenguaje propio de la disciplina se hace importante para simplificar las argumentaciones.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

Es un nivel en el que se pasa constantemente del análisis a la síntesis.

- ***Acción representativa***

En este tipo de acciones se trata que de manera principalmente simbólica se hagan evocaciones de lo que sucedería con los objetos concretos que se manipularon y con otro tipo de objetos que se podrían utilizar para el mismo propósito.

Para provocar esta situación el maestro debería plantear a los estudiantes actividades en las que el uso de los materiales resulte engorroso o imposible, esto induce el desarrollo de estrategias mentales en las que se imaginen los estudiantes lo que sucedería si se manejaran los manipulativos de cierta manera.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

El lenguaje simbólico aqui tiene una función muy importante para poder buscar representaciones alternativas a las relaciones que se exploran.

- ***Acción independizada***

Es una acción totalmente mental sin evocaciones de los materiales utilizados en las etapas anteriores, se trabaja de manera principal con imágenes mentales y el lenguaje propio de la disciplina, es un acercamiento a la formalización de los conceptos y sus relaciones con otros.

En esta etapa el maestro debe involucrar al estudiante con situaciones en las que no sólo realice las cosas que se le han enseñado si no que explore

caminos inversos, generalice resultados, pronostique resultados, realice la actividad de diversas maneras (aunque esto se puede hacer desde la etapas iniciales), genere nuevas situaciones problemáticas vinculadas a las que se le han planteado, entre otras actividades que estimulan el pensamiento lógico y permiten profundizar en el manejo de contenidos abstractos.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

Hasta este momento se inicia el manejo abstracto de los conceptos sin referencia explícita a situaciones como las anteriores.

Estas etapas no necesariamente son secuenciales o tienen que pasarse una a una. Pero si ilustran un proceso complejo que no se puede pasar por alto.

Desafortunadamente, la enseñanza tradicional inicia en la última etapa y se queda ahí sin la riqueza que se puede obtener en las etapas anteriores, pero sobre todo sin dar la oportunidad a los estudiantes de conformar sus propios conceptos y confrontarlos en diversas situaciones para inducirlos a la aceptación de convenciones.

Adicionalmente, cabe mencionar que el iniciar con situaciones en las que estudiante puede decir algo y puede participar porque entiende las situaciones en ese nivel, le permite desarrollar una mejor autoimágen y mejorar por lo tanto su autoestima. De tal modo si lo abstracto no lo entiende a la perfección le quedan las etapas anteriores en las cuales el se puede apoyar y tratar de usarlas como especie de “ganchos conceptuales” o “metáforas” para salir de dificultades.

No sólo se trata de incorporar algo que distraiga a los alumnos y les haga menos pesada la clase, se trata de enseñar fortaleciendo las partes conceptuales antes de llegar a la mecanización y el manejo operativo.

Los conceptos formales son nociones aceptadas de manera oficial por la comunidad de matemáticos, para llegar a ellos la humanidad tuvo que pasar por muchas etapas constructivas, no se puede tratar de inducir un manejo de conceptos formales si no se ha desarrollado un trabajo para construir estas nociones.

Cuando los sujetos interactúan con objetos o situaciones, se ponen en juego diversas estructuras mentales, en las que intervienen aspectos como las creencias, concepciones del sujeto a partir de las cuales éste da “sentido” a las acciones que realiza.

El sujeto configura imágenes mentales de lo que sucede, éstas provocan ciertos significados que tienen sentido de manera personal para el sujeto y que están ligadas al concepto formal, aunque esta relación puede no ser consiente. Éstas imágenes entran en juego con las intuiciones de los sujetos y las imágenes mentales que ya poseía, las cuales son temporales, se modificarán o abandonarán como consecuencia de otras experiencias, lo cual es natural que suceda en la conformación de nuevos conceptos.

Vale la pena comentar que no se supone que cada individuo está interesado en construir nociones matemáticas. Precisamente la actividad diseñada por el docente debe provocar procesos no necesariamente conscientes que impliquen la generación de significados o conceptos matemáticos.

Es importante recalcar que los significados creados por los sujetos son las imágenes y los elementos principales que posee el individuo para interactuar con diversas situaciones, participan en sus acciones pero pueden ser modificados.

El sujeto puede interactuar con objetos para que con base en esta interacción se vayan conformando imágenes mentales y significados, los cuales pueden ser totalmente alejados del concepto que se desee abordar, dependerá de la actividad que se realice la relación que se pueda establecer con las actividades y los conceptos, ahí es donde interviene el docente, planeando actividades que ayuden al sujeto a formarse las nociones requeridas.

Los objetos se pueden manipular, deformar, contemplar, o transformar, esto influye en el sujeto de manera inmediata y le ayuda a comprender diversas relaciones, en este tipo de actividades se apoya para generar ideas y concepciones.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

En este proceso no se conoce todo lo que hay que saber del objeto, se le explora y paulatinamente se van generando otras imágenes de éste, no siempre el proceso va en una dirección positiva, puede conducir a desviaciones, pero el maestro puede ayudar a que esto no suceda.

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

Dos individuos que participen en la misma actividad pueden generar ideas diferentes y entender lo que están haciendo de manera diversa. En la matemática esto es frecuente, se dice que las clases de matemáticas son sitios en donde:

> ***El maestro piensa una cosa, dice otra, escribe otra, explica otra y el alumno también entiende otra.***

INCLUIR FIGURA ALUSIVA

De tal modo que la imagen más adecuada del concepto o procedimiento se logra por caminos muy complejos, pero no se agota, siempre hay nuevos aspectos que explorar.

En este proceso de construcción se pasa del lenguaje ordinario, cotidiano, al lenguaje apoyado en recursos personales, de simbología o nomenclatura, a las convenciones compartidas por los especialistas del ramo, justamente en el sentido inverso acostumbrado en la enseñanza.

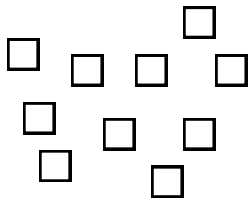
Hay diversas maneras de promover la construcción de conceptos, en esta publicación veremos como es posible apoyar la enseñanza de la matemática, con una actitud que asume algunos principios del constructivismo. Es una interpretación, un intento de sistematización, una forma de ejemplificar lo que es posible realizar con un material como los Bloques de Dienes.

Cada maestro atendiendo a sus posibilidades personales y las de la situación que enfrenta deberá elaborar sus propios procedimientos, se espera que el libro que tiene en sus manos lo ayude en tan compleja labor.

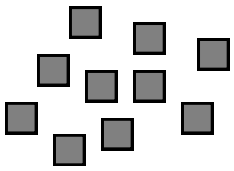
Adición y substracción de números enteros y expresiones algebraicas

En la primera parte de este matebloquemática se mostraron algunos aspectos teóricos y constructivos de la noción de número entero, hagamos un breve repaso del manejo de este tipo de números con los bloques de Dienes, porque utilizaremos algunas de esas ideas a lo largo de esta parte.

Los cuadraditos de colores, de tal forma que a los obscuros se les identifique con una unidad positiva, mientras que los blancos correspondan con una unidad negativa.



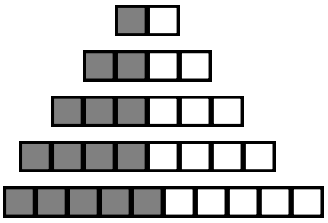
Unidades Negativas



Unidades Positivas

Representaciones del cero

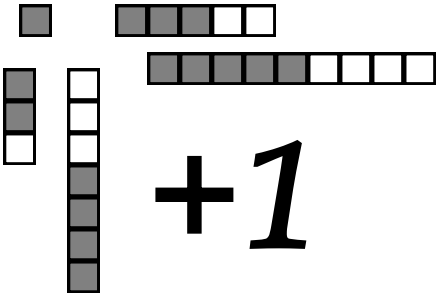
Como se ha dicho, en la primera parte, el cero en los números enteros ***0*** es un equilibrio, por ello se puede representar con los cuadritos de la siguientes maneras:



0

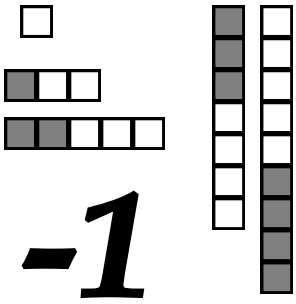
Diferentes representaciones de números enteros

De esta manera también los números enteros tienen representaciones diferentes, por ejemplo, ***+1*** se puede representar de las siguientes maneras:



+1

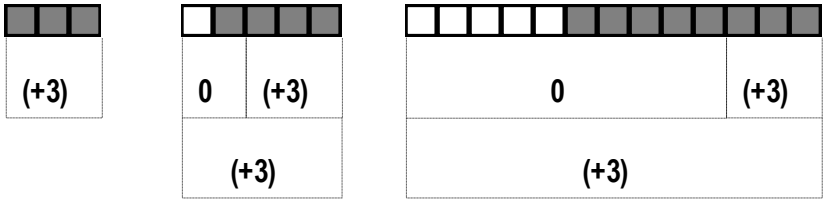
También ***-1*** puede ser representado como sigue:



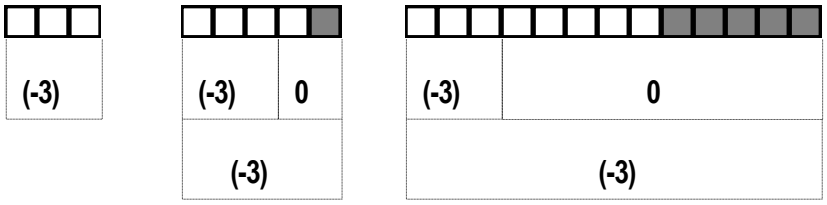
-1

La idea central es poner un "cero" adyacente al número que se trabaja con el fin de obtener diversas representaciones, este es en esencia el truco algebraico de "restar y sumar la misma cantidad".

Veamos como esto se presenta en representación de ***(+3)*** y ***(-3)***



Diferentes representaciones de (+3)



Diferentes representaciones de (-3)

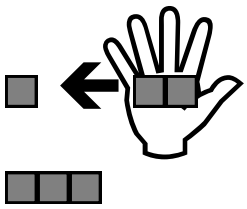
Al signo del número se le asocia con el significado como "ganar" o "perder"; también suelen mencionarse los de "poner" y "quitar".

La suma de números enteros

Utilizando estas representaciones se pueden realizar la suma de números enteros como las siguientes:

(+1) + (+2)= ***(+1) + (-2)=*** ***(-1) + (+2)=*** ***(-1) + (-2)=***

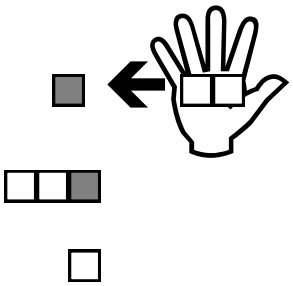
Al signo de la operación se le asocia con la idea de agregar:



Para sumar **(+1) + (+2)**

A (+1) se le agrega o pone (+2)

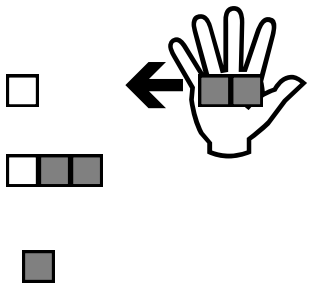
De tal forma que (+1) + (+2) = (+3)



Para sumar **(+1) + (-2)**

A (+1) se le agrega o pone (-2)

De tal forma que (+1) + (-2) = (-1)

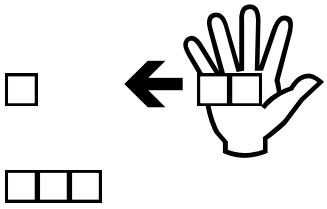


Para sumar (-1) + (+2)

A (-1) se le agrega o pone (+2)

De tal forma que (-1) + (+2) = (+1)

Para sumar (-1) + (-2)



A (-1) se le agrega o pone (-2)

De tal forma que (-1) + (-2) = (-3)

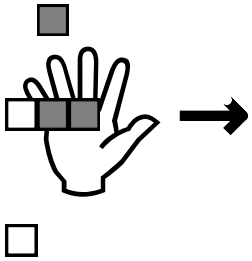
Observe que se ha modificado un poco el proceso pero en esencia es lo mismo.

La diferencia de números enteros

Veamos ahora como realizar las siguientes diferencias entre números enteros:

(+1) - (+2)= (+1) - (-2)= (-1) - (+2)= (-1) - (-2)=

Iniciemos con el primer caso:



Para restar (+1) - (+2)

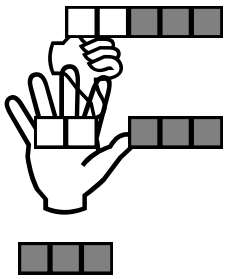
A (+1) se le quita (+2)

De tal forma que (+1) - (+2) = (-1)

En el segundo caso tendríamos:

Para restar (+1) - (-2)

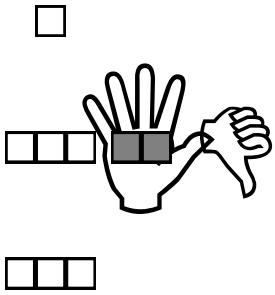
¡Más vale que sobre que falte!



A (+1) se le quita (-2)

De tal forma que (+1) - (-2) = (+3)

Para el tercer caso procedemos como sigue:



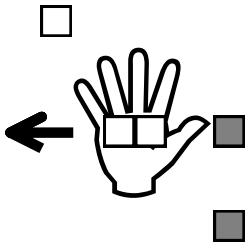
Para restar (-1) - (+2)

A (-1) se le quita (+2)

De tal forma que (-1) - (+2) = (-3)

Como se ve a veces es necesario tomar en cuenta si la situación inicial, es adecuada para la operación que nos proponemos. Sin embargo, no importa que nos suceda que no es suficiente la cantidad de ciertas fichas por que ello nos obliga a replantear la situación o buscar otros caminos.

El último caso de la diferencia de enteros que analizaremos es el siguiente:



Para restar (-1) - (-2)

A (-1) se le quita (-2)

De tal forma que (-1) - (-2) = (+1)

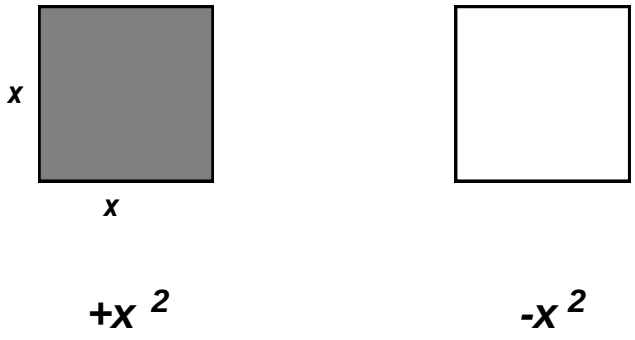
Introducción a las manipulaciones algebraicas

Con lo anterior basta para los propósitos de esta parte dedicada la álgebra.

En efecto, consideremos que el cuadrado pequeño tiene una unidad de medida como longitud de su lado, luego entonces su área será 1. Podemos considerar que de acuerdo al color estemos hablamdo de +1 o -1, como ya se trabajo antes:

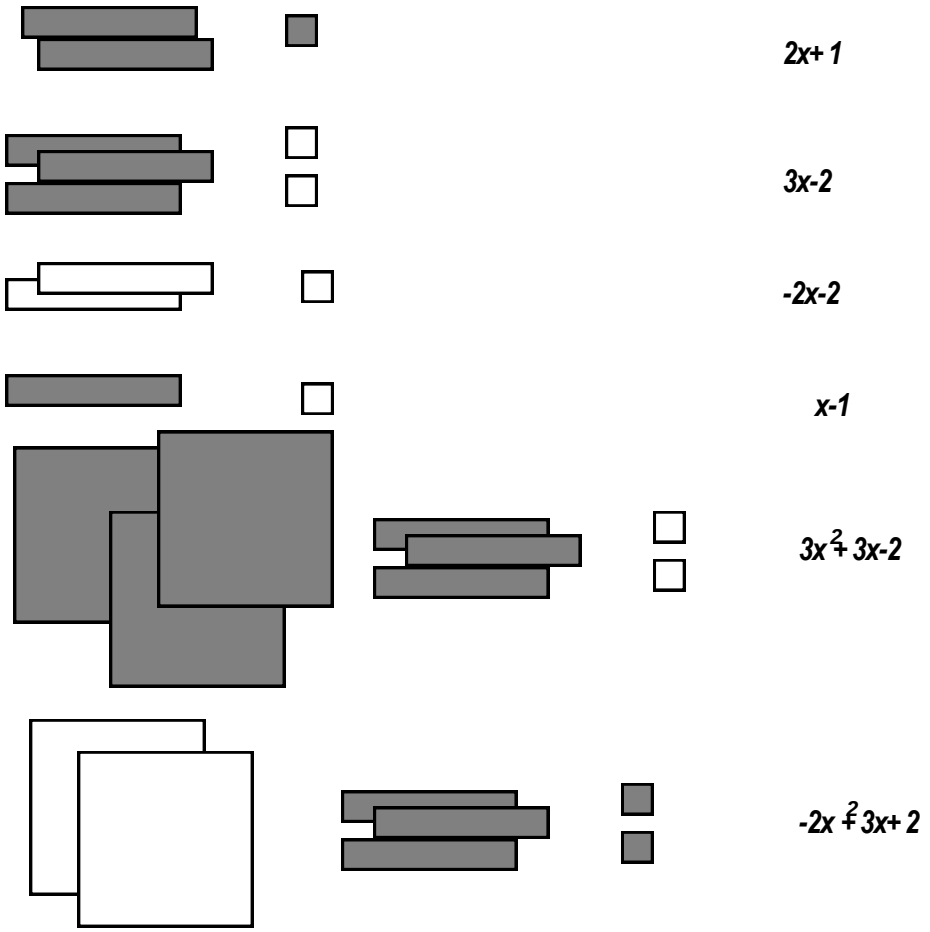
Si en las regletas, la longitud de uno de sus lados es la unidad y consideramos que el otro lado es *x,* entonces el àrea sería $1 \times x = x$, además podríamos convenir que se acuerdo al color se haga referencia a +*x* o -*x*.

En el mismo orden de ideas como el cuadrado mayor tiene como longitud de su lado el lado mayor de la regleta, o sea *x*, entonces con el se pueden representar $+x^2$ y de acuerdo al color $-x^2$.

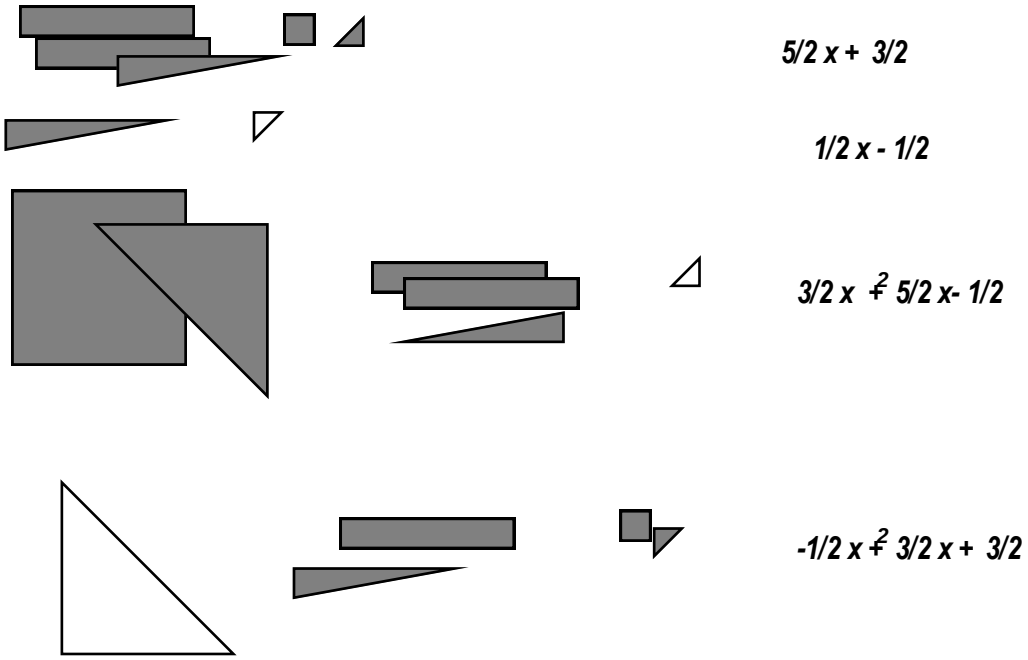


Los Bloques de Dienes y las expresiones algebraicas

De esta forma, se pueden hacer corresponder a los Bloques de Dienes con expresiones algebraicas que involucren números enteros, *x* y x^2.

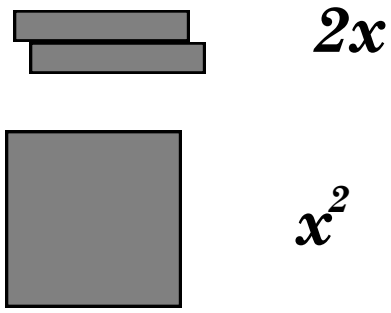


Utilizando mitades también se puede representar algunos polinomios con coefcientes fraccionarios:



El uso de los bloques de Dienes permitirá establecer reglas para el manejo de términos semejantes y ayudarán a eliminar errores frecuentes como el

considerar que expresiones como: $2x$ y x^2, son iguales, dado que simplemente no corresponden al mismo tipo de figuras:



Suma y resta de polinomios de primer y segundo grado.

De tal manera que con las mismas reglas con las que operamos con números naturales podemos realizar operaciones de suma y resta de polinomios, es decir se equilibran entre sí las piezas del mismo tipo con diferentes colores para dar lugar a un cero.

La suma

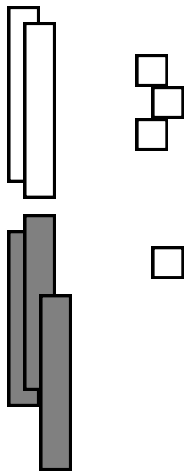
Veamos como se puede proceder en la enseñanza de la suma de polinomios de primer o segundo grado, claro está que estamos suponiendo que no se está en el inicio si no que ya se ha avanzado con situaciones más sencillas de las que se presentan a continuación.

Consideremos la suma:

$$\begin{array}{r} -2x-3 \\ +\quad 3x-1 \\ \hline \end{array}$$

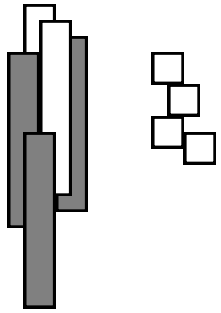
Se puede representar cada sumando con los bloques:

$$\begin{array}{r} -2x-3 \\ +\ 3x-1 \\ \hline \end{array}$$



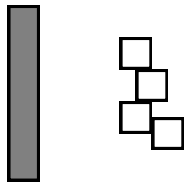
Se agrupan las piezas según correspondan, es decir, regletas con regletas y cuadrados pequeños con cuadrados pequeños:

$$\begin{array}{r} -2x-3 \\ +\ 3x-1 \\ \hline \end{array}$$



Se detectan las `piezas que se equilibran unas con otras y se obtiene el resultado:

$$\begin{array}{r} -2x-3 \\ +\ 3x-1 \\ \hline x-4 \end{array}$$

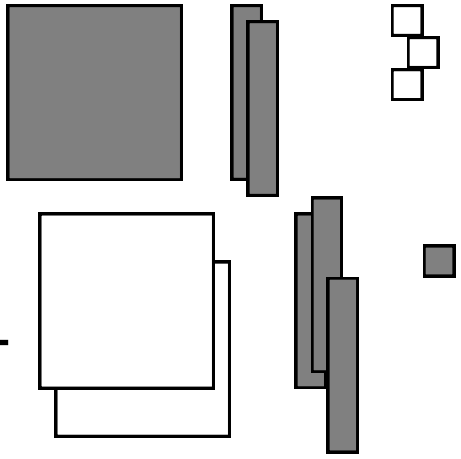


Consideremos otra suma:

$$\begin{array}{r} x^2+2x-3 \\ +\ -2x^2+3x+1 \\ \hline \end{array}$$

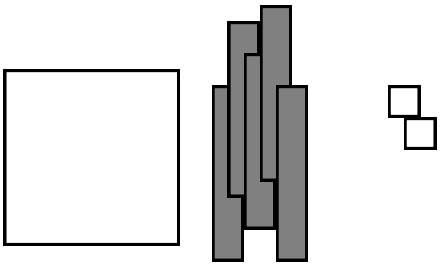
Se puede representar cada sumando con los bloques:

$$\begin{array}{r} x^2+2x-3 \\ +\quad -2x^2+3x+1 \\ \hline \end{array}$$



Se detectan las piezas que se equilibran y se obtiene el resultado:

$$\begin{array}{r} x^2+2x-3 \\ +\quad -2x^2+3x+1 \\ \hline -x^2+5x-2 \end{array}$$

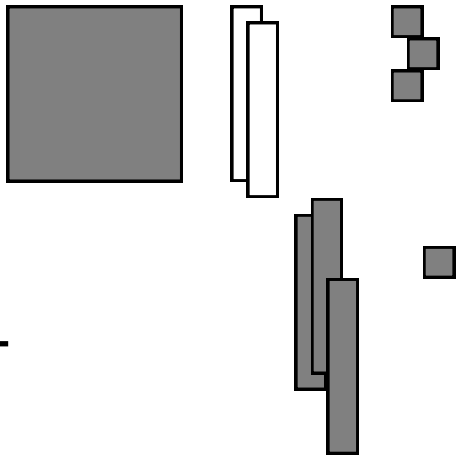


Analicemos ahora el siguiente caso:

$$\begin{array}{r} x^2-2x+3 \\ +\quad 3x+1 \\ \hline \end{array}$$

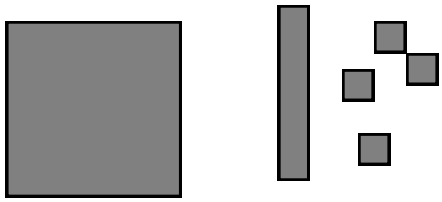
Se puede representar cada sumando con los bloques:

$$\begin{array}{r} x^2-2x+3 \\ +\quad 3x+1 \\ \hline \end{array}$$



Se detectan las piezas que se equilibran y se obtiene el resultado:

$$\begin{array}{r} x^2-2x+3 \\ +\quad 3x+1 \\ \hline x^2+x+4 \end{array}$$



La resta

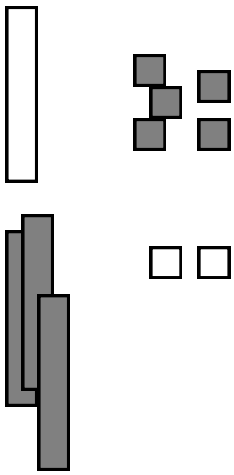
Para el caso de la resta se procede de manera análoga a lo que se realizó con los números enteros:

Consideremos la siguiente operación entre dos polinomios de primer grado:

$$\begin{array}{r} -x+5 \\ -\quad 3x-2 \\ \hline \end{array}$$

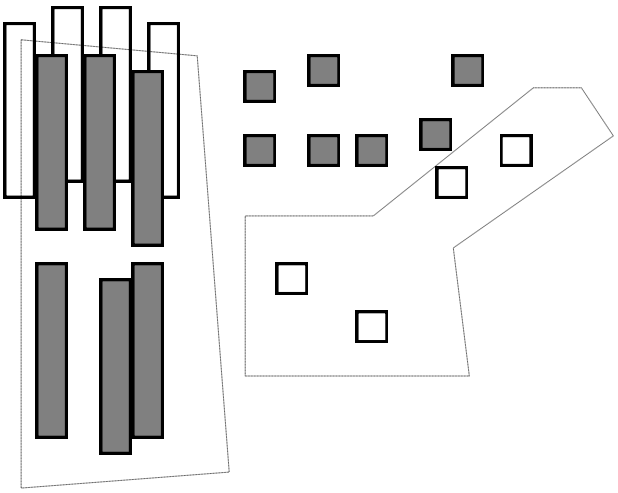
Se puede representar cada elemento de la operación con los bloques:

$$\begin{array}{r} -x+5 \\ -\quad 3x-2 \\ \hline \end{array}$$



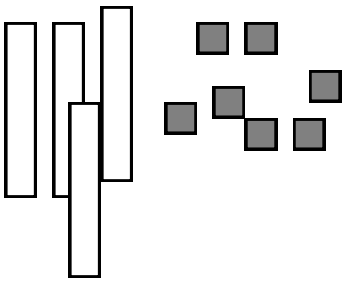
Se agrupan las piezas según correspondan y se procede a quitar lo de abajo a lo de arriba, en caso de no poderse se completa con un “cero” para llevar a cabo la operación:

$$\begin{array}{r} -x+5 \\ -\ 3x-2 \\ \hline \end{array}$$



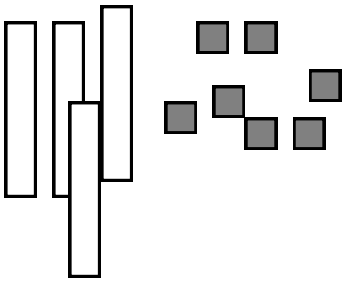
Por lo tanto las piezas que quedan son:

$$\begin{array}{r} -x+5 \\ -\ 3x-2 \\ \hline \end{array}$$



y se obtiene el resultado:

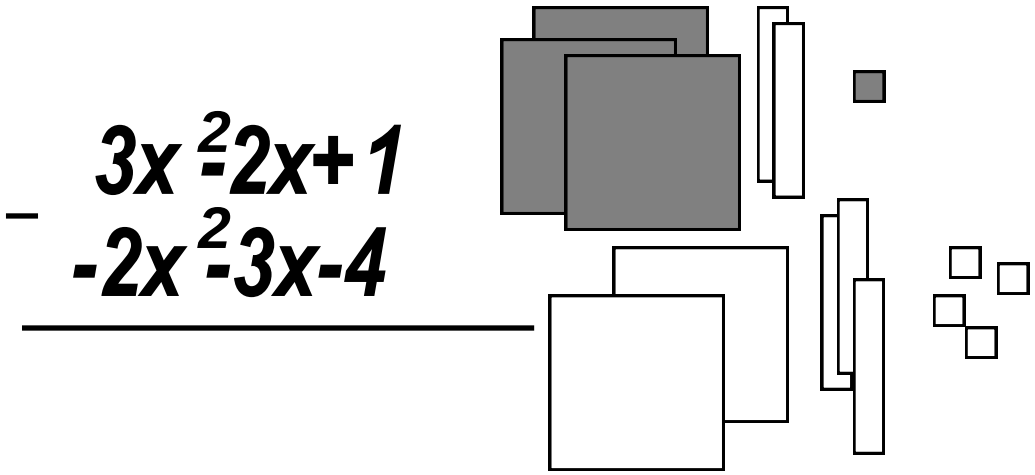
$$\begin{array}{r} -x+5 \\ -\ 3x-2 \\ \hline -4x+7 \end{array}$$



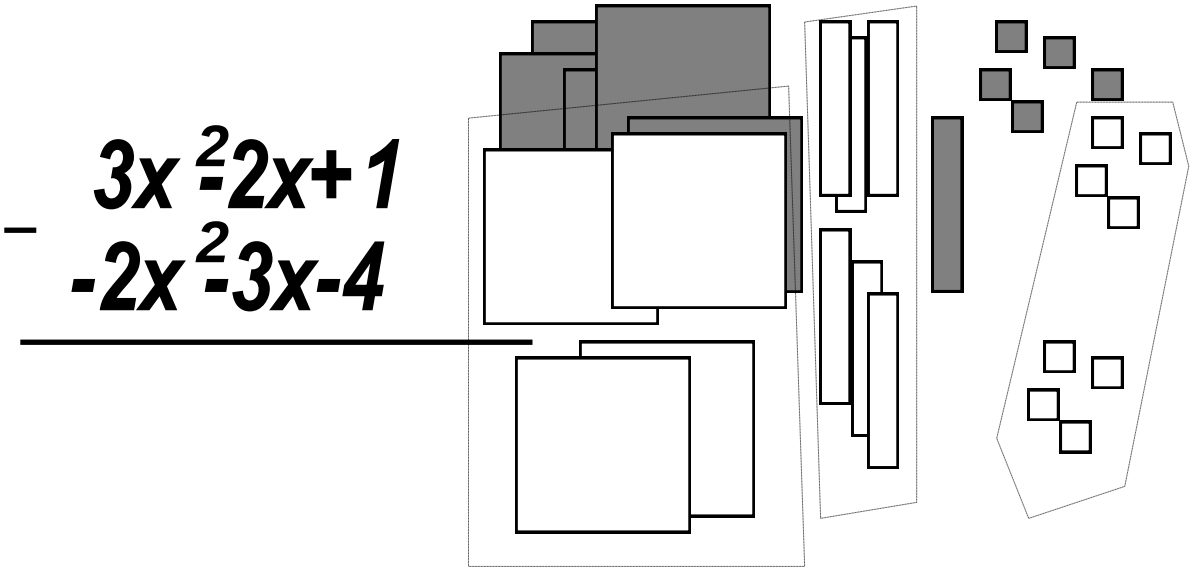
Consideremos ahora la siguiente diferencia de polinomios:

$$\begin{array}{r} 3x^2-2x+1 \\ -\ -2x^2-3x-4 \\ \hline \end{array}$$

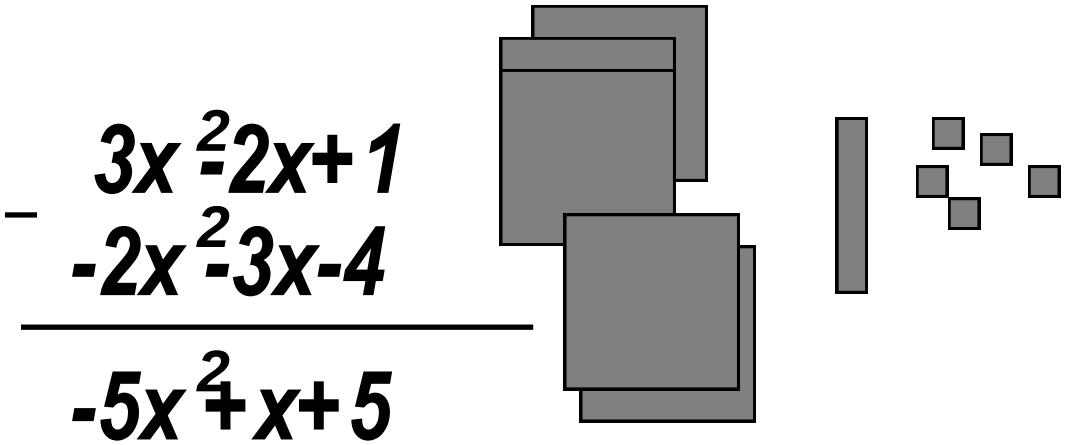
Se puede representar cada sumando con los bloques:



Se completan las piezas de arriba, si es necesario, para poder quitar lo mismo que se señala abajo:



Así el resultado será:

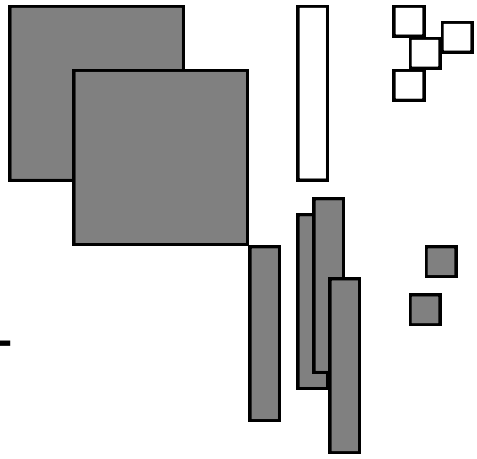


Ahora consideremos una suma combinada:

$$
\begin{array}{r}
2x^2-1x-4 \\
-\quad 4x+2 \\
\hline
\end{array}
$$

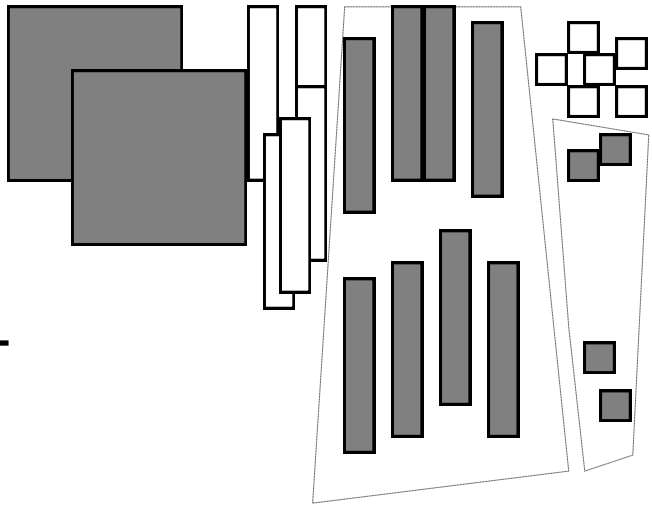
Se representa cada término de la operación con los bloques:

$$
\begin{array}{r}
2x^2-1x-4 \\
-\quad 4x+2 \\
\hline
\end{array}
$$



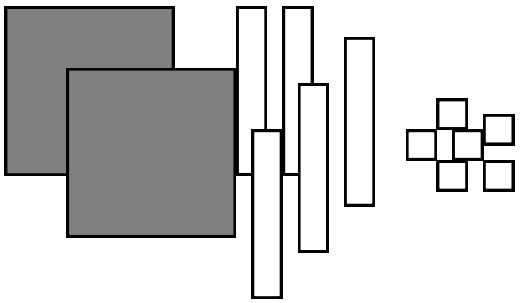
Se equilibran piezas y se identifican la cantidad que se quita a la de arriba:

$$
\begin{array}{r}
2x^2-1x-4 \\
-\quad 4x+2 \\
\hline
\end{array}
$$



De lo anterior se obtiene el resultado:

$$\begin{array}{r} 2x^2-1x-4 \\ -\quad 4x+2 \\ \hline 2x^2-5x-6 \end{array}$$



Seguramente los estudiantes pueden dar sentido a muchos aspectos del álgebra que se les dificultan como la relación entre términos semejantes y la necesidad de agrupar término a término de acuerdo a las expresiones algebraicas involucradas.

Cabe mencionar que se pueden iniciar los trabajos con los bloques sin asociarlos a expresiones algebraicas, puede darse el caso de que se les denomine por su forma y color y posteriormente se van asociando a términos algebraicos que pueden o no ser escritos simbólicamente, esto se, se pueden manejar de manera verbal, sólo después de esto se podrá iniciar el trabajo de la escritura de expresiones. En la enseñanza tradicional justament6e se inicia en esta última etapa sin referentes que el estudiante pueda manejar para apoyar la construcciñon de sus conceptos.

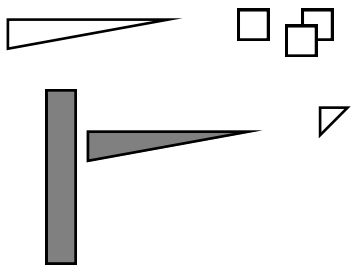
Utilizando las mitades también se pueden trabajar algunos polinomios con coeficientes fraccionarios:

Consideremos la suma:

$$\begin{array}{r} -1/2\,x - 3 \\ +\quad 3/2\,x - 1/2 \\ \hline \end{array}$$

Se puede representar cada sumando con los bloques:

$$\begin{array}{r} -1/2\,x - 3 \\ +\quad 3/2\,x - 1/2 \\ \hline \end{array}$$

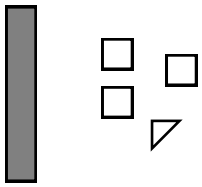


Se agrupan las piezas según correspondan:

$$\begin{array}{r} -1/2\,x - 3 \\ +\quad 3/2\,x - 1/2 \\ \hline \end{array}$$

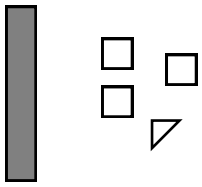
Se equilibran unas con otras las piezas y se obtiene el resultado:

$$\begin{array}{r} -1/2\,x - 3 \\ +\quad 3/2\,x - 1/2 \\ \hline 2/2\;\; x - 6/2 \end{array}$$



Que se puede escribir también como:

$$\begin{array}{r} -1/2\,x - 3 \\ +\quad 3/2\,x - 1/2 \\ \hline x - 3 \quad 1/2 \end{array}$$

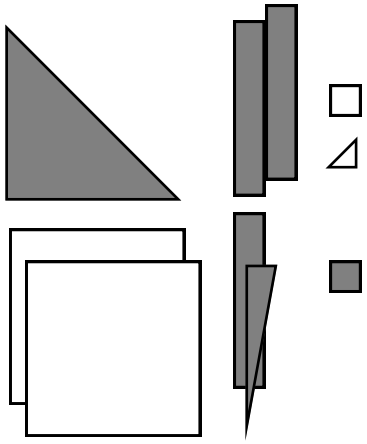


De la misma forma se pueden incluir otro tipo de situaciones como:

$$\begin{array}{r} 1/2\,x^2 + 2x - 3/2 \\ +\quad -2\,x^2 + 3/2\,x + 1 \\ \hline \end{array}$$

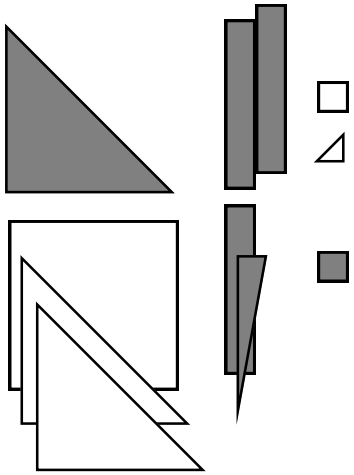
Se puede representar cada sumando con los bloques:

$$
\begin{array}{r}
1/2\,x^2 + 2x - 3/2 \\
+\quad -2\,x^2 + 3/2\,x + 1 \\
\hline
\end{array}
$$



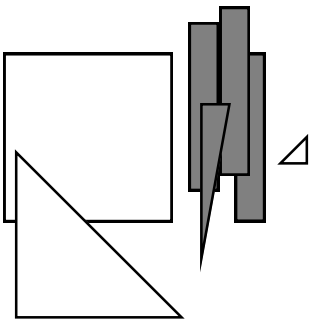
Se detectan las piezas que se equilibran, para ello será necesario en este tipo de situaciones cambiar una pieza completa por mitades:

$$
\begin{array}{r}
1/2\,x^2 + 2x - 3/2 \\
+\quad -2\,x^2 + 3/2\,x + 1 \\
\hline
\end{array}
$$



y se obtiene el resultado:

$$
\begin{array}{r}
1/2\,x^2 + 2\,x - 3/2 \\
+\quad -2\,x^2 + 3/2\,x + 1 \\
\hline
-3/2\,x^2 + 7/2x - 1/2
\end{array}
$$



Lo mismo puede hacerse para operaciones que impliquen oro tipo de combinaciones.

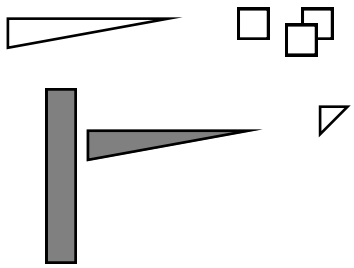
Para el caso de la resta también se procede de manera análoga:

Consideremos la siguiente operación entre dos polinomios de primer grado:

$$\begin{array}{r} -1/2\ x - 3 \\ -\ \ 3/2\ x - 1/2 \\ \hline \end{array}$$

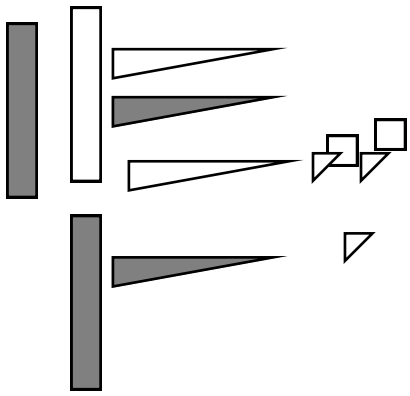
Se puede representar cada elemento de la operación con los bloques:

$$\begin{array}{r} -1/2\ x - 3 \\ -\ \ 3/2\ x - 1/2 \\ \hline \end{array}$$



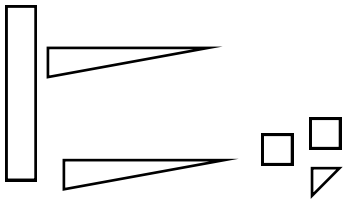
Se agrupan las piezas según correspondan y se procede a completar o substituir lo que se requiere para poder hacer la substracción de piezas y completar la operación:

$$\begin{array}{r} -1/2\ x - 3 \\ -\ \ 3/2\ x - 1/2 \\ \hline \end{array}$$



Es decir, se completa con un “cero” para llevar a cabo la operación que nos arroja como resultado:

$$\begin{array}{r} -1/2\ x - 3 \\ -\ \ 3/2\ x - 1/2 \\ \hline -4/2\ x - 5/2 \end{array}$$

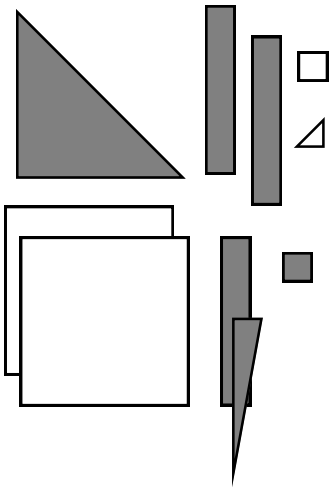


Consideremos ahora la siguiente diferencia de polinomios:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1/2\,x^2 + 2x - 3/2 \\
- & -2\,x^2 + 3/2\,x + 1 \\
\hline
\end{array}
$$

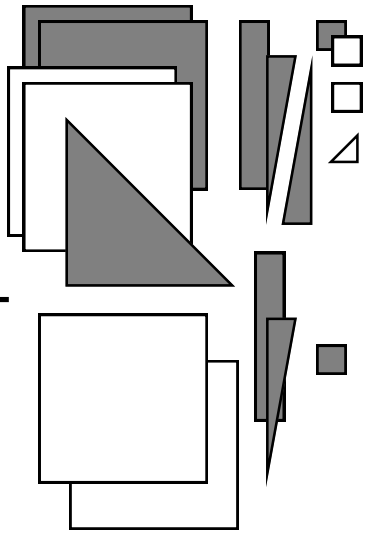
Se puede representar cada sumando con los bloques:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1/2\,x^2 + 2\,x - 3/2 \\
- & -2\,x^2 + 3/2\,x + 1 \\
\hline
 & -3/2\,x^2 + 7/2x - 1/2
\end{array}
$$



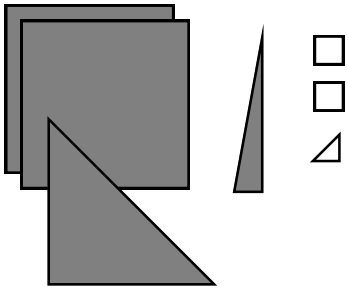
Se hacen los ajustes necesarios para poder realizar la operación:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1/2\,x^2 + 2\,x - 3/2 \\
- & -2\,x^2 + 3/2\,x + 1 \\
\hline
 & -3/2\,x^2 + 7/2x - 1/2
\end{array}
$$



A partir de lo anterior determinamos que el resultado es:

$$
\begin{array}{r}
1/2\,x^2 + 2\,x - 3/2 \\
-\;\; -2\,x^2 + 3/2\,x + 1 \\
\hline
5/2\,x^2 + 1/2x - 5/2
\end{array}
$$



Como se pudo observar es no sólo posible si no conveniente que las expresiones utilizadas en los ejemplos de suma se consideren también para construir ejemplos de restas, dado que esto le permite al estudiante establecer diferencias y reconocer las diversas acciones que corresponden en cada caso.

Por otra parte, es importante hacer notar las limitaciones de los bloques de Dienes para trabajar sólo con polinomios hasta grado dos, sin embargo, debemos reconocer que este trabajo inical puede ayudar a los alumnos a mejorar sus ideas respecto a la operatividad algebraica.

No conviene tratar de buscar ejemplos complejos o situaciones engorrosas, la simplicidad será una gran ayuda, las actividades que se manejen en clase deben ser totalmente familiares a los estudiantes y debemos dejar que realicen sus propias representaciones y obtengan conclusiones.

Vale la pena insistir que este tipo de manipulativos pueden ayudar a la formación de nociones o procesos matemáticos pero no son un substituto de la matemática no del maestro, sólo son elementos iniciales para trabajar los contenidos abstractos desde un nivel al alcance de los estudiantes que les permitan acceder al conocimiento matemático.

Multiplicación y división de números enteros y expresiones algebraicas

Repaso

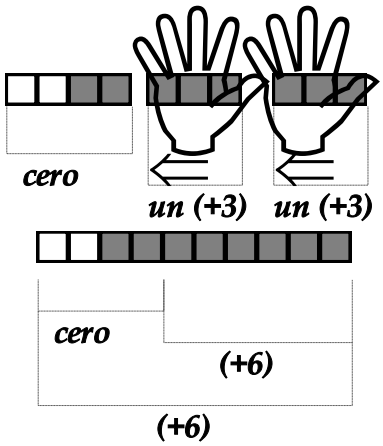
Convienen hacer un breve repaso de lo que se realizó con los números enteros para ubicar la utilidad de este esfuerzo en la atención al problema de algunos polinomios.

La multiplicación

Recordemos como se realiza esto a partir de las siguientes multiplicaciones:

(+2) × (+3)= ***(+2) × (-3)=*** ***(-2) × (+3)=*** ***(-2) × (-3)=***

Consideremos el primer caso:

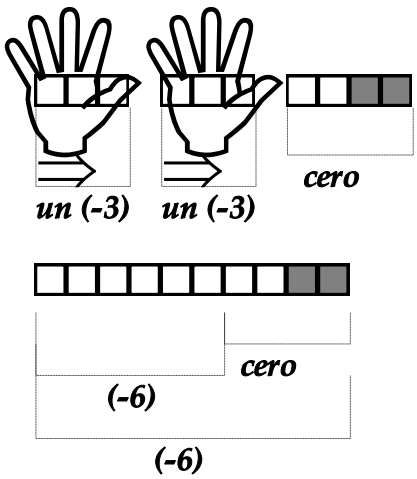


Para multiplicar (+2)(+3)

se piensa como poner dos veces (+3)

De tal forma que (+2)× (+3) = (+6)

En el segundo caso tenemos:

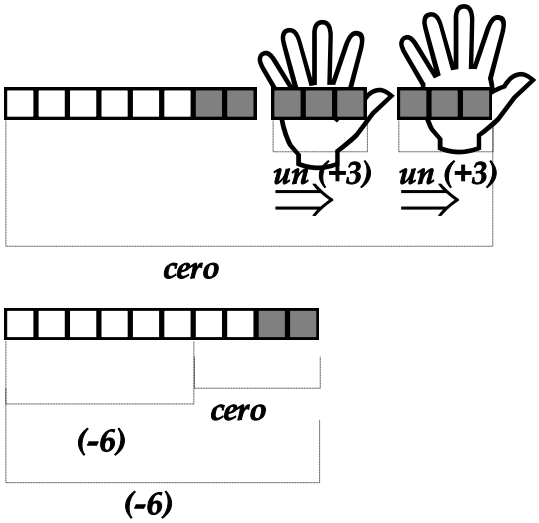


Para multiplicar (+2)(-3)

se piensa como poner dos veces (-3)

De tal forma que (+2)× (-3) = (-6)

Para el tercer caso podemos proceder como sigue:

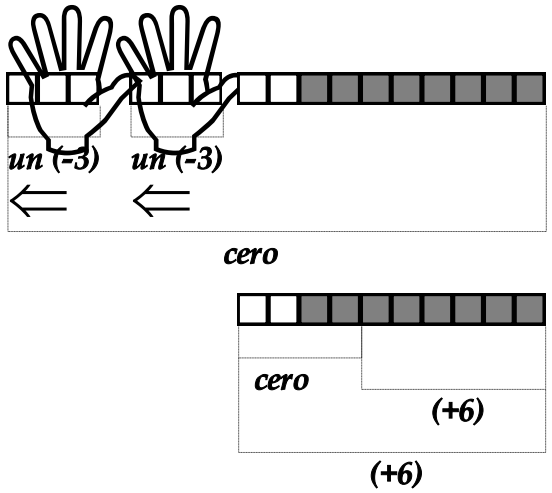


Para multiplicar (-2) (+3)

se piensa como quitar dos veces (+3)

De tal forma que (-2) × (+3) = (-6)

En el cuarto caso se procede como sigue:



Para multiplicar (-2) (-3)

se piensa como quitar dos veces (-3)

De tal forma que (-2) × (-3) = (+6)

Daremos en adelante por conocida a la regla de los signos, esto es como si ya se conociera de manera eficaz y por tanto no tengamos que recurrir a introducirla nuevamente:

Multiplicación de polinomios

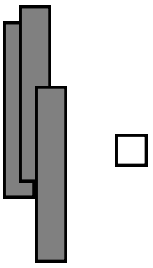
Entonces, para la multiplicación de polinomios podemos recurrir a la asociación de esta operación con el área de un rectángulo.

Si tratamos de considerar el caso en el que se multiplica una constante por un polinomio de primer grado podríamos proceder como sigue:

$$2(3x-1)$$

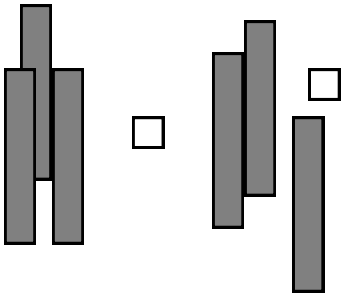
Utilizamos los bloques para representar lo que está dentro del paréntesis:

$$2(3x-1)$$



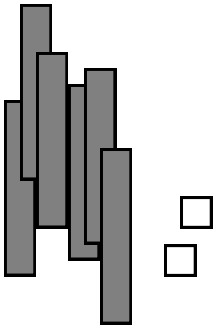
y en seguida lo duplicamos según indica la constante

$$2(3x-1)$$



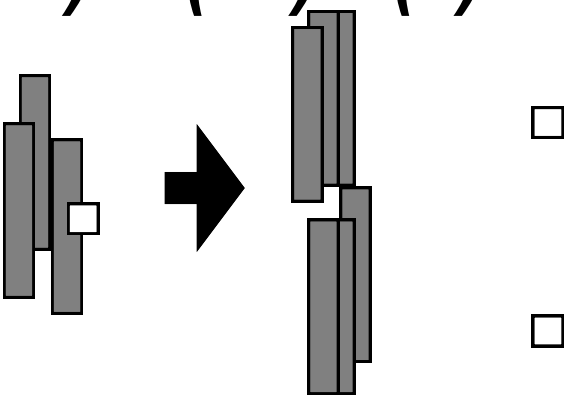
por lo tanto el resultado será:

$$2(3x-1)= \quad 6x-2$$



lo importante es que se puede hacer explícita la distributividad dado que se puede hacer notar que se duplica el primero de los términos del paréntesis y luego se duplica el segundo:

$$2(3x-1)=2(3x)-2(1)$$

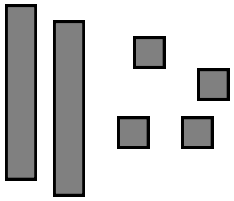


En el caso de que la constante sea negativa se procede de manera similar. Por ejemplo realicemos la siguiente operación:

$$-3(2x+4)$$

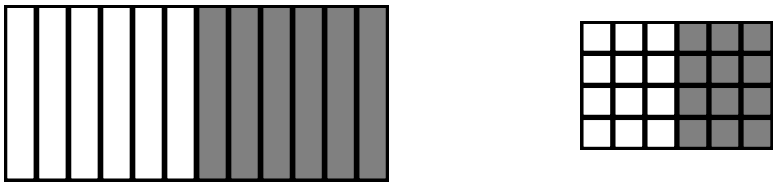
Iniciamos representando con los bloques lo que está dentro del paréntesis:

$$-3(2x+4)$$



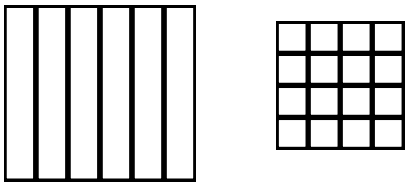
en seguida consideramos que la operación con la constante indica que hay que quitar tres veces lo del paréntesis, lo cual hacemos partiendo de un cero que lo permita, tal y como se hizo en el caso de los números enteros, para ello primero consideramos un cero adecuado para cada sumando:

$$-3(2x+4)$$



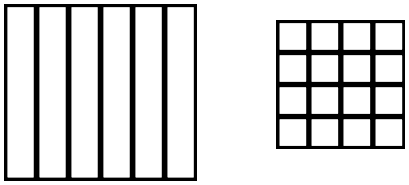
Posteriormente se procede a quitar lo que se indica, de tal modo que nos queda:

$$-3(2x+4)$$



por lo tanto el resultado será:

$$-3(2x+4)=-6x-12$$

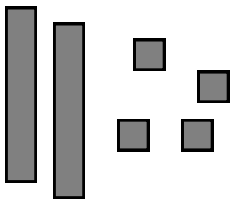


nuevamente queda claro que se tiene que operar cada sumando por separado y ello refuerza la propiedad distributiva.

También se puede hacer haciendo la convención de que primero se trabaja como si el factor fuera positivo y luego, por el hecho de tener un signo negativo, se cambiarán de color todas las fichas.

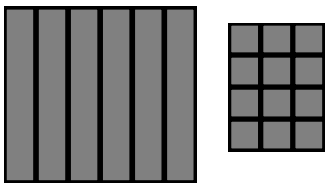
Veamos como se puede realizar esto. Iniciamos representando con los bloques lo que está dentro del paréntesis:

$$3(2x+4)$$



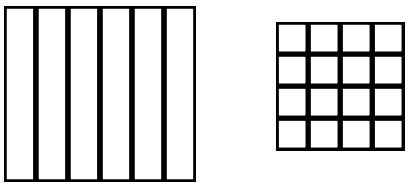
en seguida consideramos que la operación indica triplicar lo que hay dentro del paréntesis:

$$3(2x+4)$$



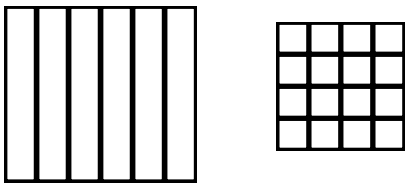
Posteriormente se cambian cada una de las piezas por unas del otro color:

$$-3(2x+4)$$



por lo tanto el resultado será:

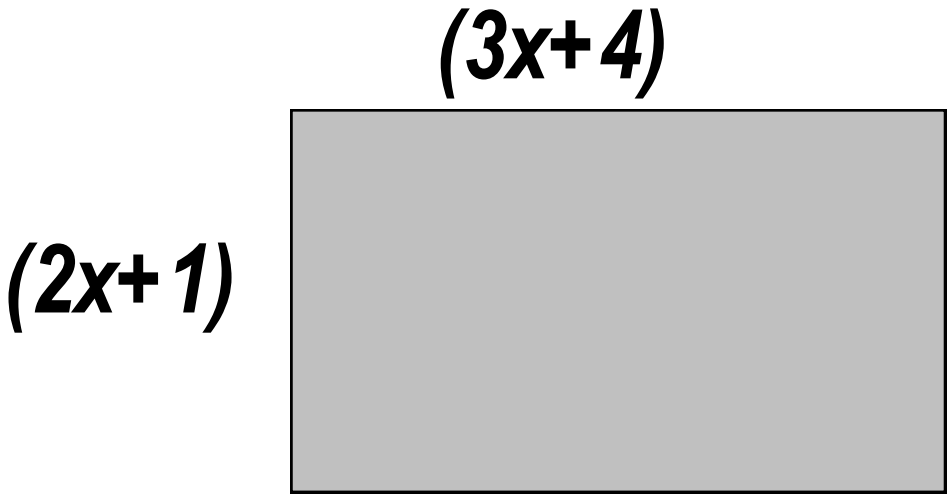
$$-3(2x+4)=-6x-12$$



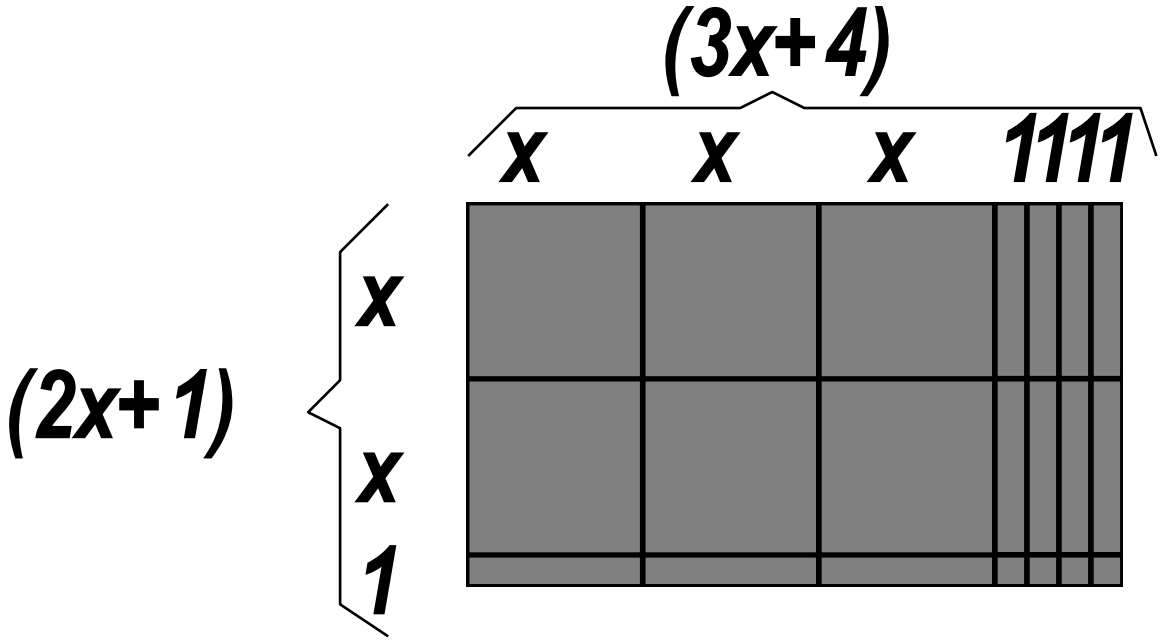
El caso que resulta más complejo es cuando se multiplican dos polinomios de primer grado, por ejemplo:

$$(2x+1)\ (3x+4)$$

En este caso tenemos que recurrir a la interpretación de la multiplicación como el área de un rectángulo, cuyos lados miden lo que indican cada uno de los factores:



Esto puede lograrse utilizando los Bloques de Dienes:



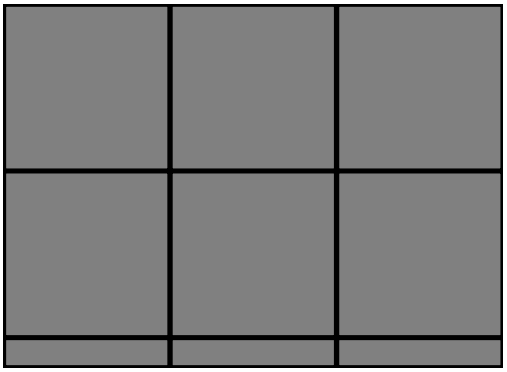
De este modo se observa que el resultado se obtendría con el conjunto de piezas utilizadas:

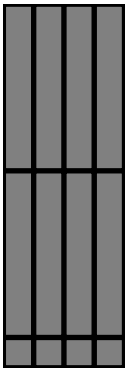
$$(2x+1)\ (3x+4) = 6x^2+11x+4$$

Si analizamos la configuración del rectángulo a partir de cierto orden en las piezas también podemos resaltar la ley distributiva:

$$(2x+1)\ (3x+4) =$$

$$=(2x+1)(3x)+(2x+1)(4)$$



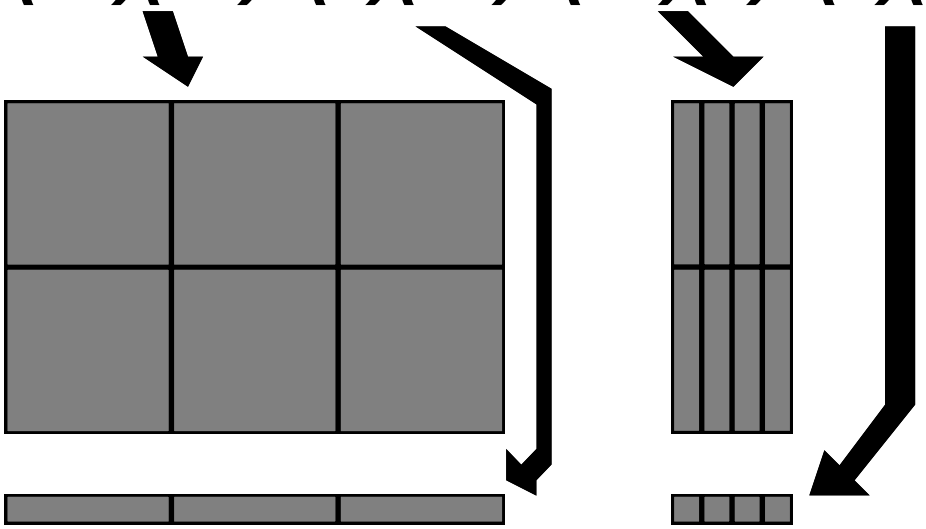


También en el siguiente paso se puede resaltar la ley distributiva:

$$(2x+1)\quad(3x+4)\quad=$$

$$=(2x+1)(3x)+(2x+1)(4)$$

$$=(2x)(3x)+(1)(3x)+(2x)(4)+(1)(4)$$

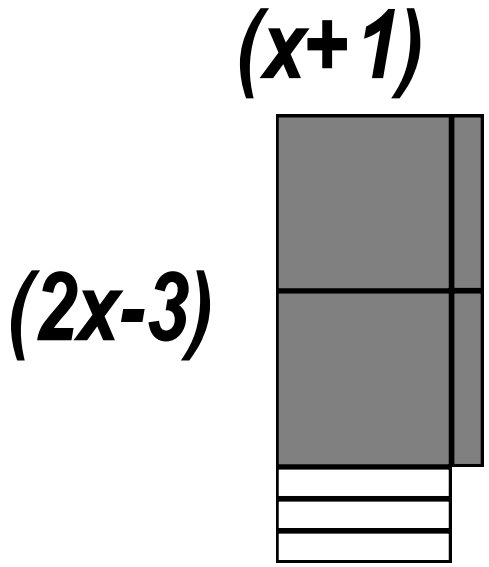


Se recomienda que en este tipo de situaciones se trabaje solamente con polinomios cuyos coeficientes sean positivos y después se trate de generalizar los procedimientos a partir del manejo de la regla de los signos. Sin embargo, en estas situaciones también será posible utilizar los Bloques de Dienes:

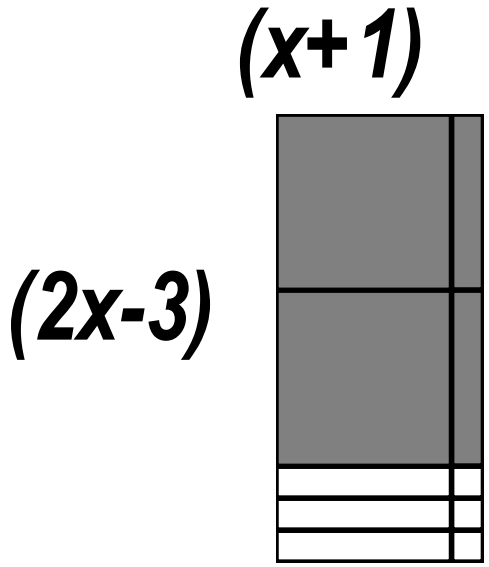
Veamos el siguiente caso:

$$(x+1)\quad(2x-3)$$

Esto puede lograrse utilizando los Bloques de Dienes, pero se debe tener algún cuidado en el primer factor se consideran piezas positivas y en las segundas piezas positivas y negativas:

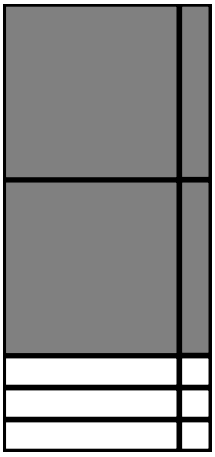


Se completa en este caso el rectángulo con cuadrados pequeños asociados a los negativos, como si consideraramos que uno de su lado es positivo y otro negativo, de tal modo que no sería un resultado positivo sino negativo:



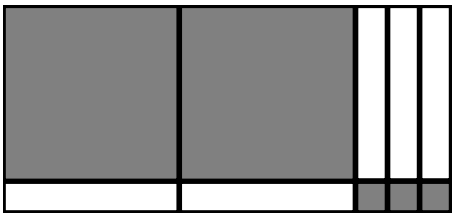
Por lo tanto el resultado sería:

$$(2x-3)\ (x+1) = 2x^2-x-3$$



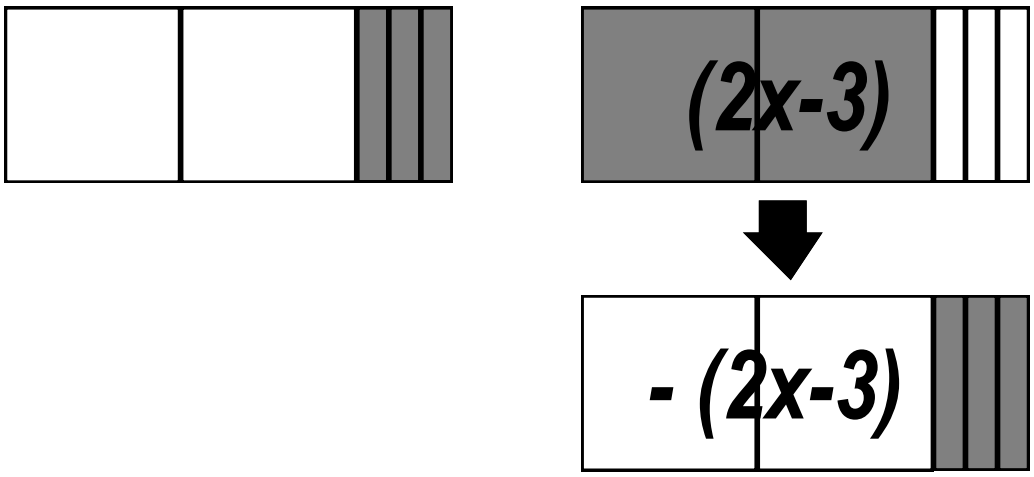
Si los términos constantes de cada polinomio fueran negativos, se tendría:

$$(2x-3)\ (x-1) = 2x^2-5x+3$$



Si uno de los factores tiene el coeficiente de las x negativo se puede hacer notar que:

$$(-2x+3) = -(2x-3)$$

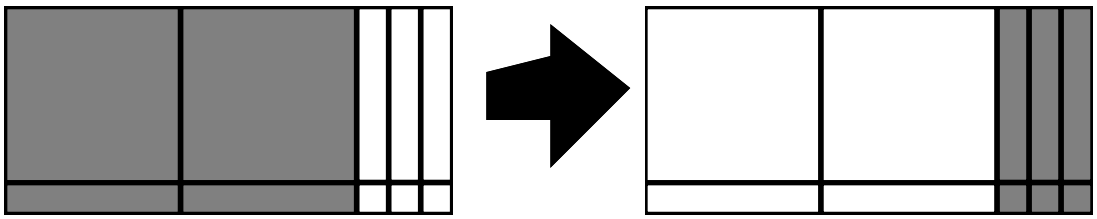


Utilizando este hecho se puede proceder como sigue cuando uno de los coeficientes de las x es negativo:

$$(-2x+3)\ (x+1) =$$

$$-(2x-3)\ (x+1) = -(2x^2-x-3)$$

$$= -2x^2+x+3$$



Cuando los coeficientes de las x´s son negativos se procede como si fueran positivos:

$$(-2x+3)\quad(-x+1)\quad=$$

$$(2x-3)\quad(x-1)\quad=2x^2-5x+3$$

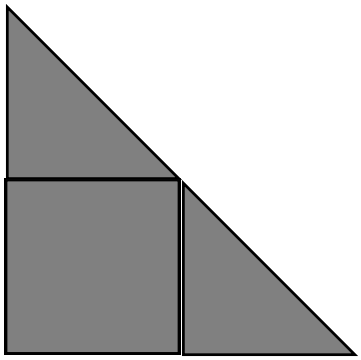
Áreas de figuras geométricas y el álgebra

El uso de los bloques partidos en mitades nos ofrece una gran cantidad de posibilidades para trabajar algo de geometría a la vez que se trabaja con álgebra, veamos como se puede realizar esta parte:

Se pueden trabajar expresiones equivalentes las cuales se obtengan por la consideración del total de las piezas o el desarrollo dela expresión correspondiente a partir de la fórmula del área de la figura correspondiente, las siguientes situaciones ilustran lo dicho:

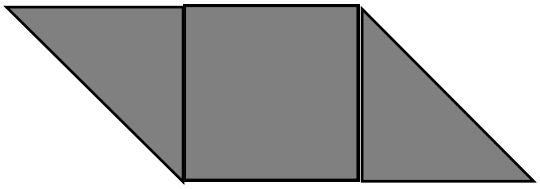
Triángulo

$$2x^2 = x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x^2 + x^2 = \frac{(2x)(2x)}{2}$$



Paralegramo

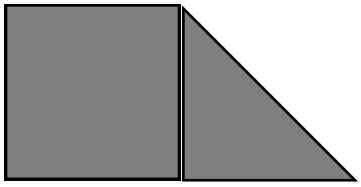
$$2x^2 = x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x^2 + x^2 = (x)(2x)$$



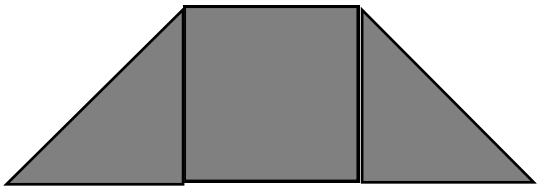
$$2x^2 + 2x = (2x+1)(x)$$

Trapecio

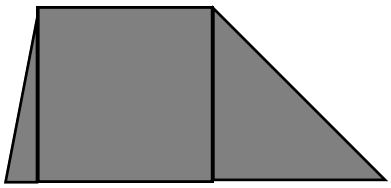
$$x^2 + \frac{1}{2}x^2 = \frac{(2x+x)x}{2}$$



$$2x^2 = x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{(3x+x)x}{2}$$



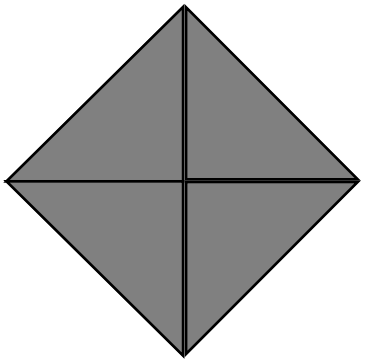
$$\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = x^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{((2x+1)+x)x}{2}$$



$$2x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) = 2x^2 + x = \frac{((2x+2)+2x)x}{2}$$

Rombo

$$4\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{4}{2}x^2 = 2x^2 = \frac{(2x)(2x)}{2}$$



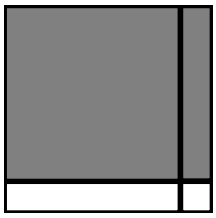
Las posibilidades de formar diferentes figuras con los bloques son muchas, pero lo más importante es que el estudiante puede escribir las relaciones que observa considerando las piezas por separado o la configuración total de la cual puede calcular su área en términos de *x*.

Este tipo de ejercicios permitirán a los alumnos reconocer la equivalencia de las expresiones algebraicas y superar muchos errores frecuentes en el manejo de éstas.

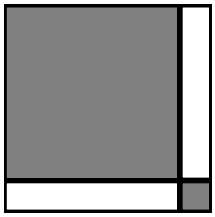
Productos notables

Esto nos puede ayudar a trabajar los famosos productos notables, cuyo nombre tal vez se debe a que es notable que pocos se los sepan:

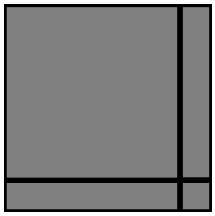
$$(x-1)\ (x+1) = x^2 - 1$$



$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$



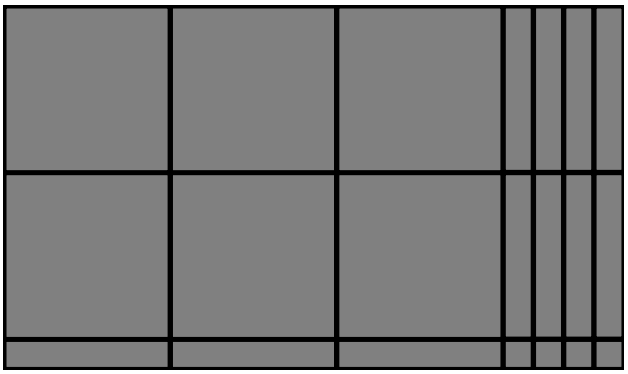
$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$



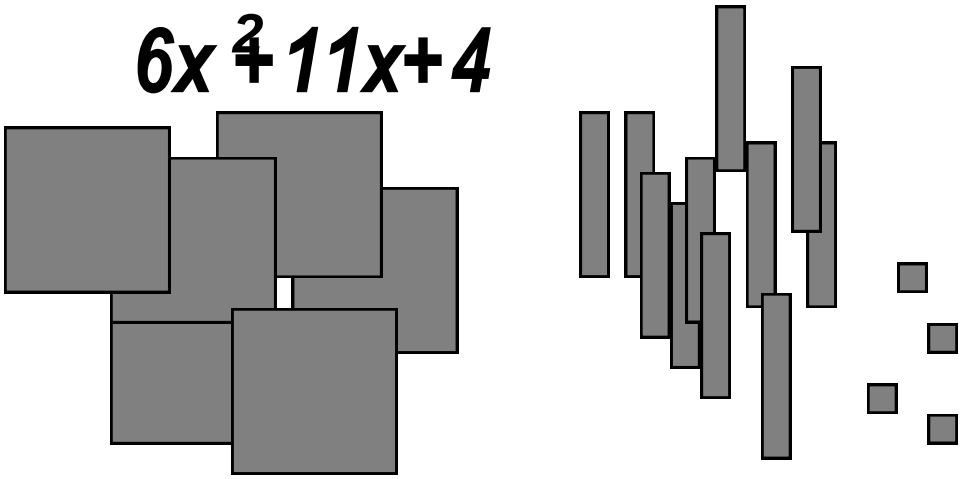
Factorización de polinomios

Algunos resultados importantes se pueden resaltar con este tipo de procedimientos. Por ejemplo, lo referente a la factorización, por ejemplo sabemos que:

$$(2x+1)\ (3x+4) = 6x^2 + 11x + 4$$



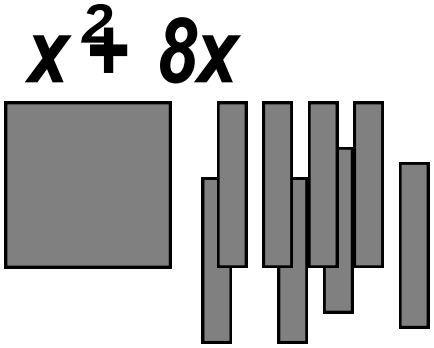
Podríamos plantearnos si con las piezas del resultado se puede construoir otro rectángulo que tenga diferentes dimesiones, esto es que los lados midan diferente del rectángulo anterior:



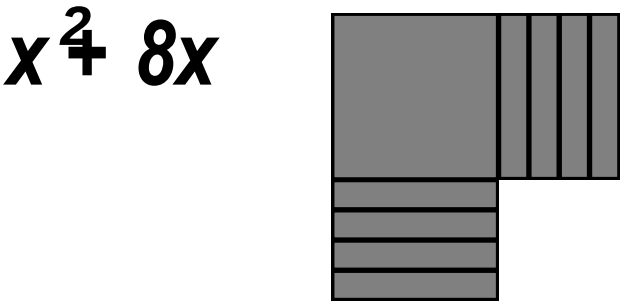
Después de muchos intentos veremos que la respuesta es no, lo cual coincide con lo que sabemos respecto a la unicidad de la factorización de polinomios, la diferencia es que aquí se hace plausible y el aceptarla es más sencillo para quienes no conocen la demostración, si se realiza esta actividad.

Por otra parte podemos intentar "completar binomios cuadrados" como sigue:

Considérese el caso:

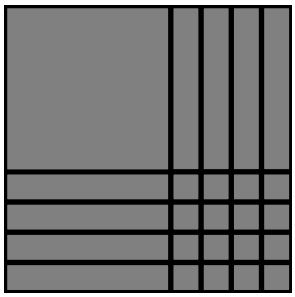


Tratando de conformar un cuadrado con dichas piezas obtendremos:



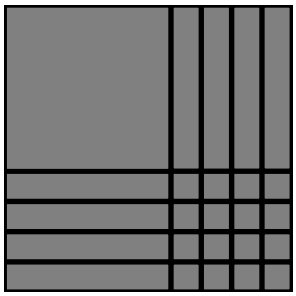
Como no se puede formar el cuadrado solamente con esas piezas tendremos que completarlo con 16 cuadrados pequeños:

$$x^2 + 8x + 16$$



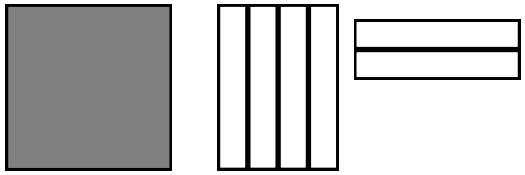
lo cual nos hace ver que dicho polinomio se puede obtener del cuadrado de otro polinomio:

$$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$$



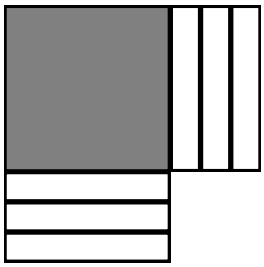
Lo mismo podría hacerse si el binomio con el que se inicia es tiene el segundo miembro negativo:

$$x^2 - 6x$$



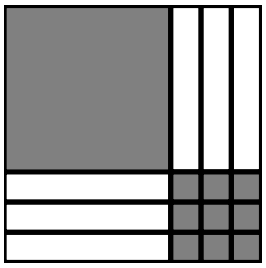
Al intentar formar el cuadrado tendríamos:

$$x^2 - 6x$$



Por tanto deberíamos emplear cuadrados pequeños de colo para completar el cuadrado y ser consecuente con la regla de los signos:

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$



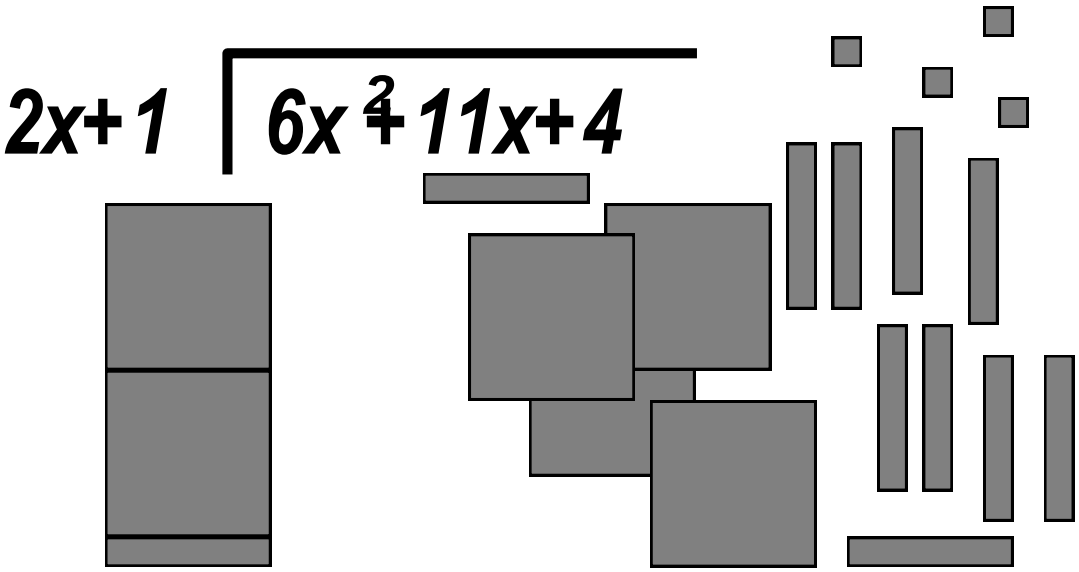
División de polinomios

Por lo anterior resultaría natural que la división de polinomios pueda desarrollarse a partir de los realizado en lo referente a la multiplicación de polinomios. Esto es, se trata de formar un rectángulo del cual conocemos el total de piezas y uno de los lados:

Por ejemplo en el caso:

$$2x+1 \;\overline{\big)\; 6x^2+11x+4}$$

Entonces en este caso tendríamos seis cuadrados grandes, once regletas y 4 cuadrados pequeños con los cuales debemos formar un rectángulo en el cual uno de sus lados sea 2x+1:



Después de algunos intentos llegaríamos a:

$$2x+1 \;\overline{\big)\; 6x^2+11x+4}$$

Lo cual nos indica que el cociente de esta división es: $3x+4$

$$\begin{array}{r} 3x+4 \\ 2x+1 \;\overline{\big)\; 6x^2+11x+4} \end{array}$$

Puede resultar que sobre algunas piezas como el siguiente caso:

$$2x+1 \;\overline{\big)\; 6x^2+11x+7}$$

Con el cual al tratar de formar el rectángulo tendríamos:

$$2x+1 \;\overline{\big)\; 6x^2+11x+7}$$

En cuyo caso el resultado se escribiría:

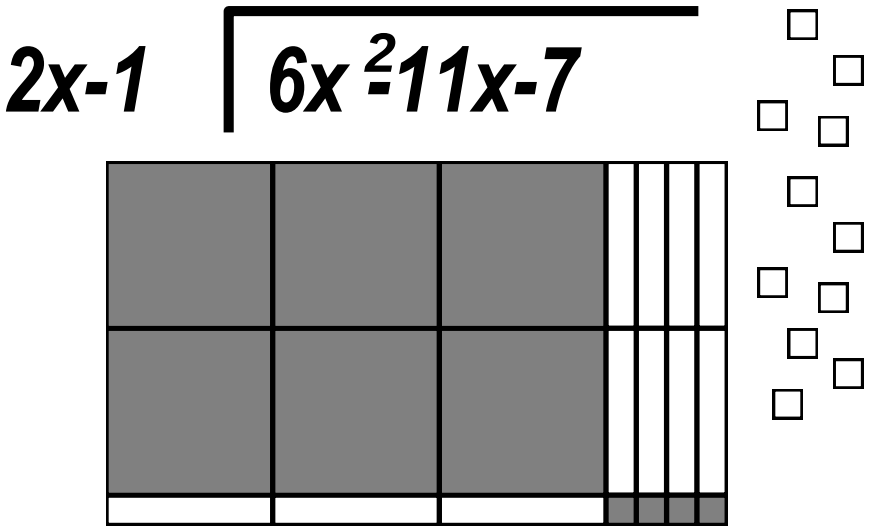
$$\begin{array}{r|l} & 3x+4 \\ \hline 2x+1 & 6x^2+11x+7 \\ & 3 \end{array}$$

En el caso de que algunos términos de los polinomios involucrados sean negativos se procede de manera similar teniendo cuidado en los signos correspondientes, por ejemplo:

En la divisdión:

$$\begin{array}{r|l} 2x-1 & 6x^2-11x-7 \end{array}$$

Se representa el dividendo con lo bloques y se trata de formar un rectángulo en el cual uno de sus lados sea el divisor:



Nótese que se agregó un cero formado por cuatro cuadros de cada color para poder completar el rectángulo.

De tal modo que el resultado será:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x-4 \\
\hline
2x-1 & 6x^2-11x-7 \\
 & \quad -11
\end{array}
$$

De la misma manera que se planteó en Matebloquemática I, se pueden desarrollar explicaciones para inducir el algoritmo de las operaciones con polinomios, este asunto se deja al lector dada la falta de espacio para incluir las explicaciones respectivas.

Ecuaciones lineales

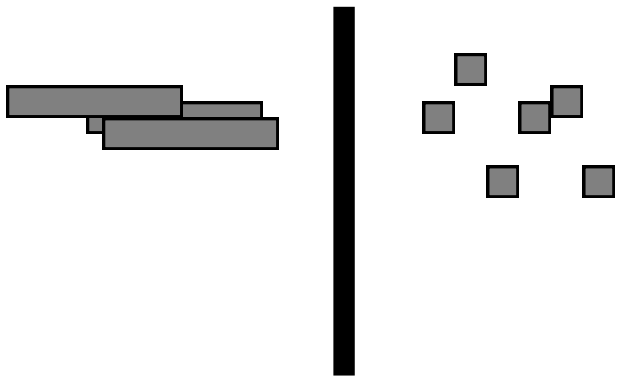
Ecuaciones de primer grado

Otra ventaja de los Bloques de Dienes se tiene cuando se introducen los temnas referidos a las ecuaciones de primer grado, dado que nos posibilitan realzar acciones con los materiales que después se pueden representar simbólicamente después de haberles dado sentido:

Veamos algunos ejemplos sobre este punto, consideremos como primer caso, la solución de la ecuación: $3x=6$

Representamos dicha ecuación con las barras y los cuadrados pequeños, en este momento haremos la convención de que una ralla podrá ser utilizada para establecer la igualdad o diferenciar ambos lados de la igualdad de la ecuación.

$$3x = 6$$

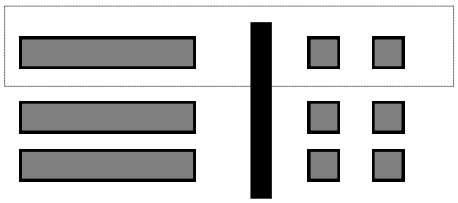


Posteriormente, formamos grupos de una regleta y repartimos lo cuadrados pequeños entre las regletas:

$$x = 6/3$$

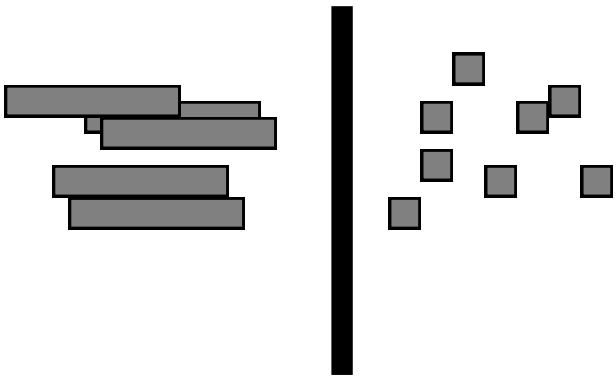
De ahí que el resultado es *x=2*.

$$x = 2$$



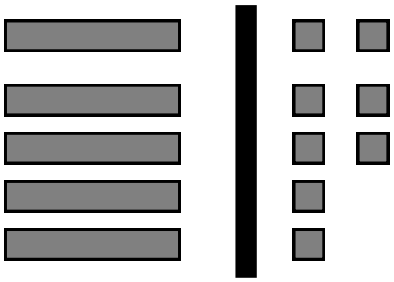
Esto puede llevarse a cabo aún sin que el reparto sea exacto:

$$5x = 8$$



Se reparten los cuadritos a cada regleta.

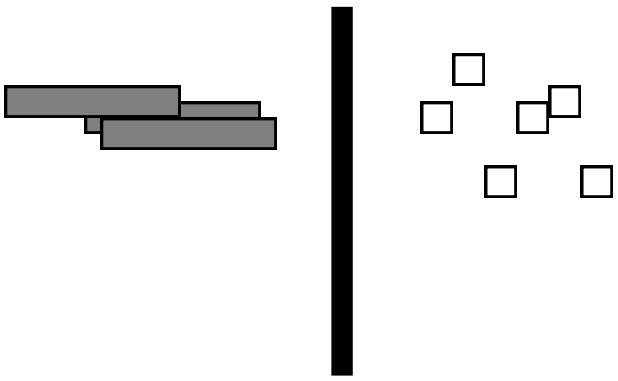
$$x = 8/5$$



De ahí que el resultado es $x = 1\frac{3}{5}$.

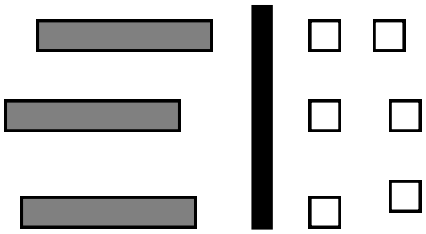
Se pueden tambvién atender los casos en que alguna de las cantidades sean negativas:

$$3x = -6$$



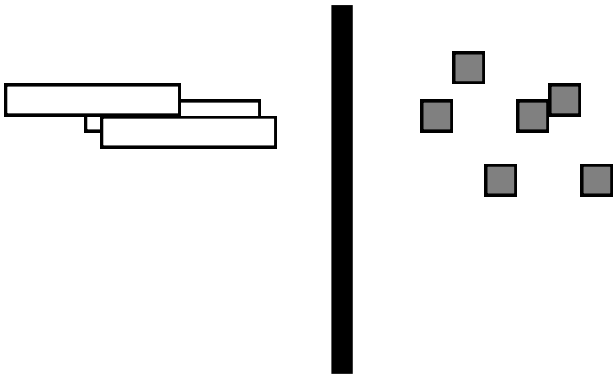
En este caso se hace la repartición de la misma forma y se obtiene el resultado:

$$x = -2$$



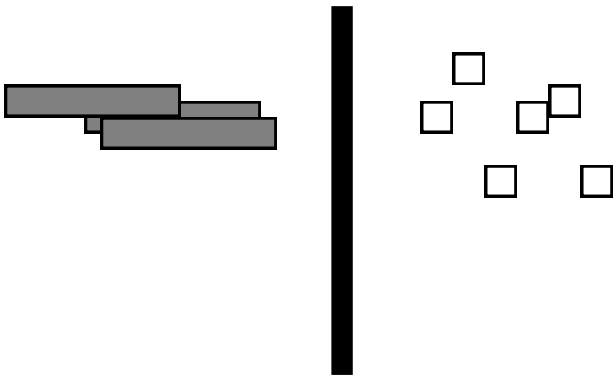
Veamos también la siguiente situación:

$$-3x = 6$$



El cual se puede resolver argumentando que si se cambia de color en el lado derecho también habrá que hacerlo del lado izquierdo:

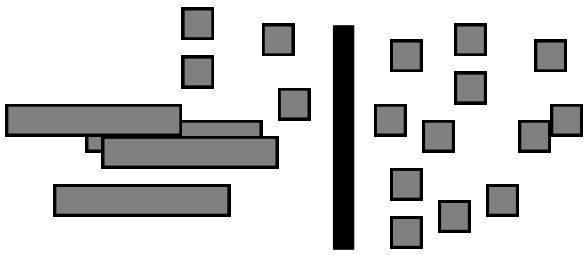
$$3x = -6$$



Con lo cyual reducimos la situación al caso antes analizado.

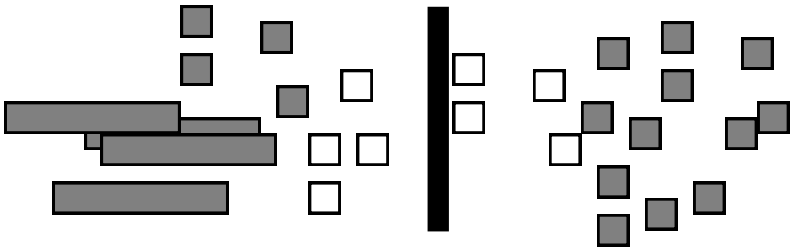
Hay otro tipo de ecuaciones que deberemos considerar y que se pueden reducir a los casos anteriores:

$$4x + 4 = 12$$



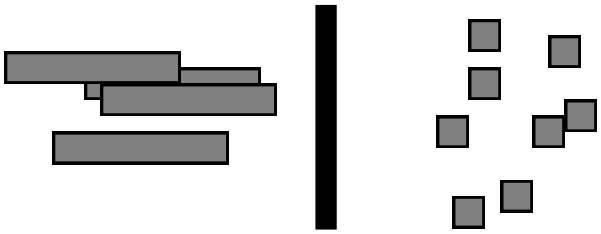
Lo que estorba en este caso es el 4 del lado derecho el cual podemos neutralizar si agregamos cuatro cuadraditos del color contrario, pero si lo hacemos de un lado lo tendremos que hacer también del otro:

$$4x + 4 - 4 = 12 - 4$$



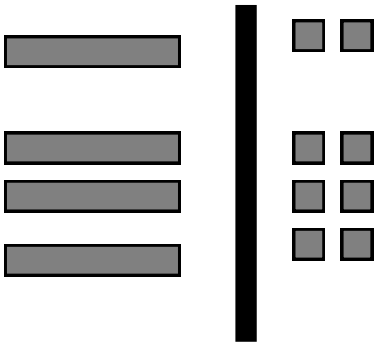
De esto podemos netralizar las piezas que sean necesario:

$$4x = 8$$



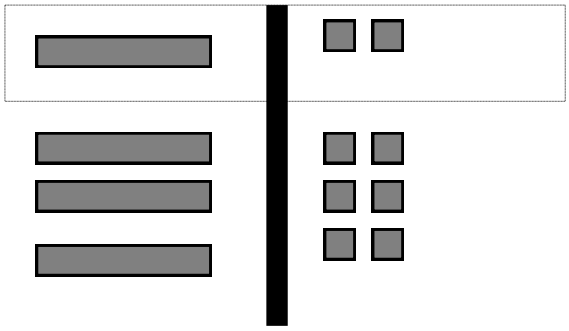
Posteriormente procedemos con el reparto y obtenemos:

$$x = 8/4$$



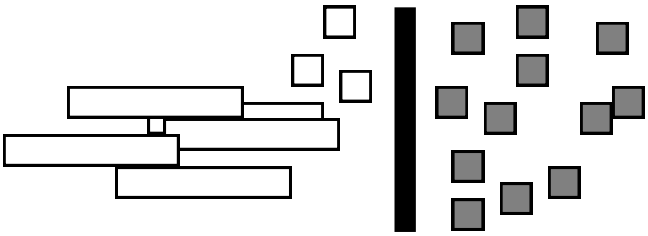
De ahí que el resultado es:

$$x = 2$$



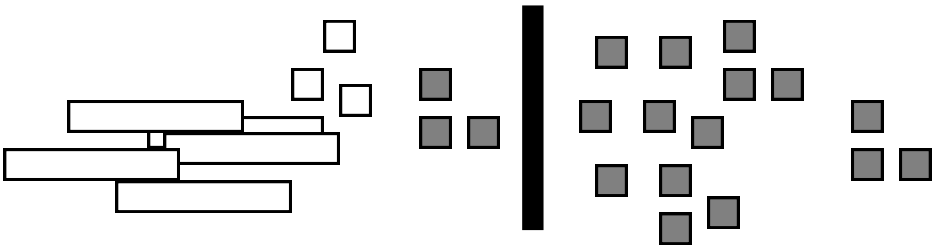
Consideremos ahora el siguiente caso con números negativos y positivos:

$$-5x - 3 = 12$$



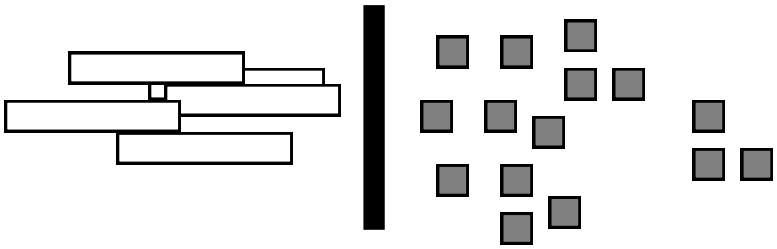
Primero quitamos los tres cuadraditos de color blanco:

$$-5x - 3 + 3 = 12 + 3$$



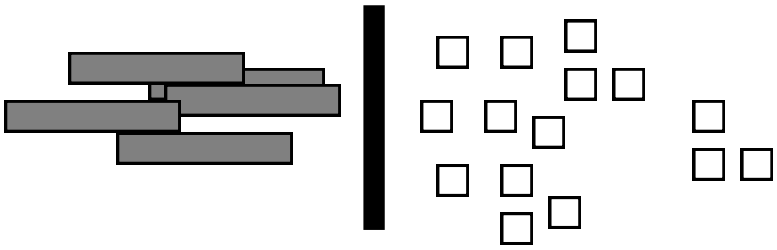
Se equilibran las piezas y obtenemos:

$$-5x = 15$$



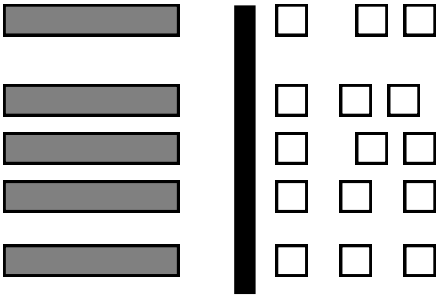
Ahora se cambia el color de cada lado:

$$5x = -15$$

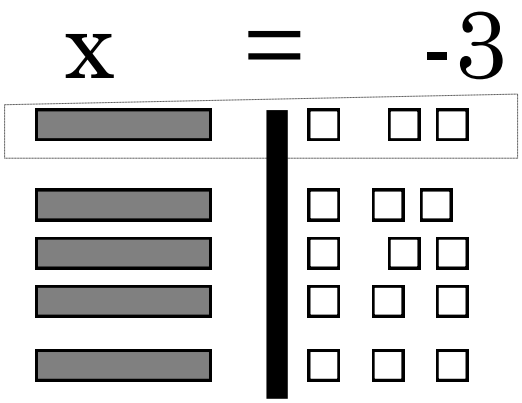


Se hace entonces el reparto:

$$x = -15/5$$

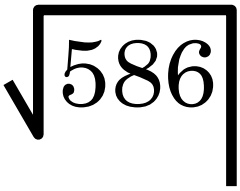


Finalmente el resultado es:

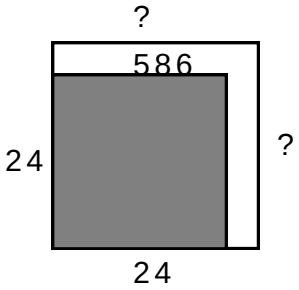


Cálculo de la raíz cuadrada con ecuaciones de primer grado

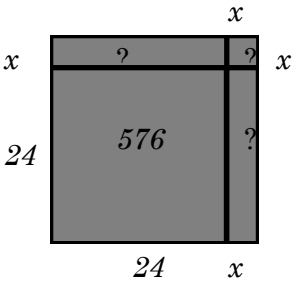
Resulta sencillo calcular raíces cuadradas con la simple aplicación de una ecuación de primer grado si se utilizan algunas configuraciones con los Bloques de Dienes. Consideremos el siguiente caso:



De algunos ensayos o por estimación sabemos que 24^2 es igual a 576 y 25^2 es 625, luego entonces podemos considerar un cuadrado de lado 24 sería el cuadrado de lados enteros que se acercaría más un cuadrado de área 586.



los espacios que faltan llenar del cuadrado grande lo podemos cubrir con dos regletas y un cuadrado pequeño, considerando que el lado de este es *x*.



De este modo el área del cuadrado mayor (586) se puede cubrir con el área del cuadrado de lado 24 (576), el àrea de dos rectángulos de lados 24 y x (es decir, $24x$) y el área de un cuadrado de lado x (esto es, x^2):

$$586 = 576 + 2(24x) + x^2$$

Pero se llena más espacio con los dos rectángulos que con el cuadrado, por ello, en una aproximación podemos despreciar el cuadrado pequeño y nos quedaría:

$$586 \approx 576 + 2(24x)$$

lo cual da una ecuación de segundo grado que se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 586 &\approx 576 + 2(24x) \\ 48x &\approx 586 - 576 \\ 48x &\approx 10 \\ x &\approx \frac{10}{48} \\ x &\approx .208 \end{aligned}$$

así pues, el lado del cuadrado de área 586 es aproximadamente:

$$24+x = 24+.208=24.208$$

Si calculamos con una calculkadora la raíz cuadrada de 586 obtendríamos:

$$\sqrt{586} \approx 24.2074$$

Como vemos este método es muy corto y nos puede ayudar a obtener una buena aproximación.

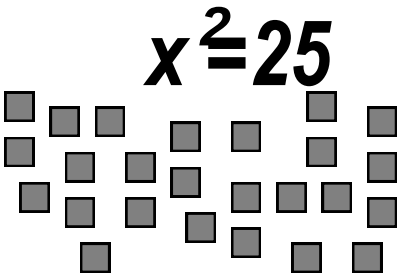
Ecuaciones de segundo grado

Ya que hemos abordado lo referente a las raíces cuadradas se puede entonces trabajar algunas ecuaciones de segundo grado sencillas con las que será ensayaremos algunos métodos a partir del manejo de los Bloques de Dienes.

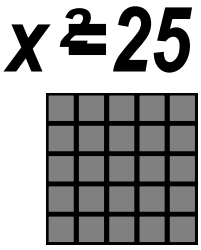
Para ello consideraremos la siguiente ecuación:

$$x^2 = 25$$

En este caso bastará tratar de formar con 25 cuadrados pequeños un cuadrado:



El cuadrado quedaría conformado así:



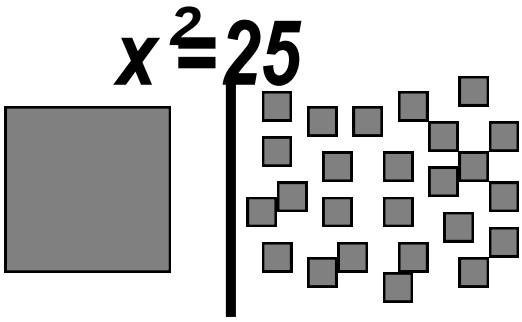
Por lo que la solución sería:

$$x=5$$

Claro está que se debe dar otro tratamiento a las raíces negativas.

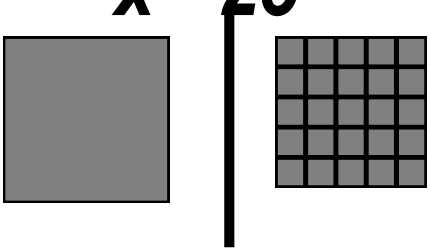
También se le podría dar un tratamiento como en las ecuaciones de primer grado formando dos áreas de trabajo con los bloque que corresponderán a ambos lados de la igualdad:

En un lado se tendrían los 25 cuadrados pequeños y en la parte izquiera un cuadrado:



Al formar el cuadrado se tendría:

$$x^2=25$$



Obviamente se podría razonar que para que los dos cuadrados tengan la misma área se requiere que el de la derecha tenga las mismas dimensiones que el de la izquierda, o sea que su lado debe ser igual a 5:

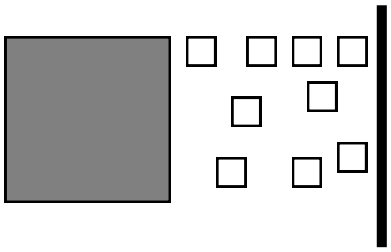
$$x=5$$

En el mismo orden de ideas se puede abordar la solución de la ecuación:

$$x^2-9=0$$

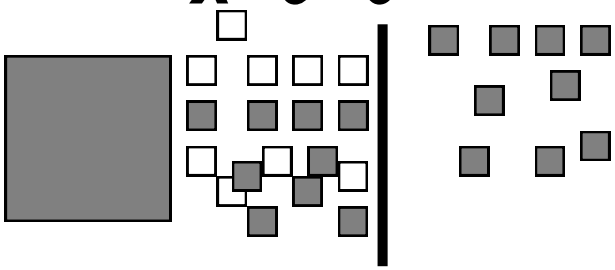
Lo cual lo podemos representar con un cuadrado grande y otros cuadrados pequeños:

$$x^2-9=0$$

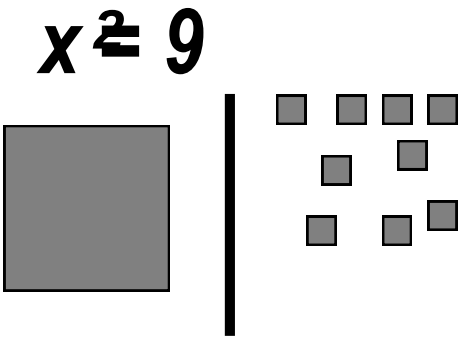


para dejar sola a la incógnita se tendrían que eliminar los cuadrados del lado izquierdo, lo cual se hace añadiendo de cada otros nueve cuadraditos del otro color:

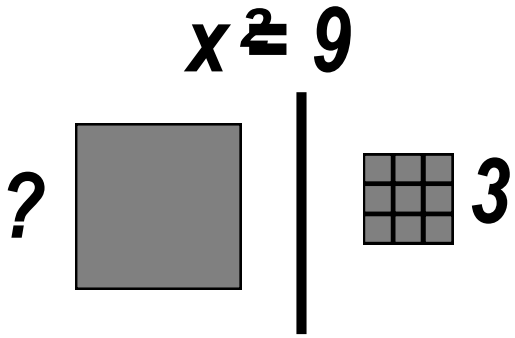
$$x^2-9=0$$



Así se quedaría que:



formando el cuadrado del lado izquierdo se tendría:



De tal forma que el cuadrado del lado derecho debe tener una longitud de 3 para lograr la igualdad de las áreas, lo cual indica que:

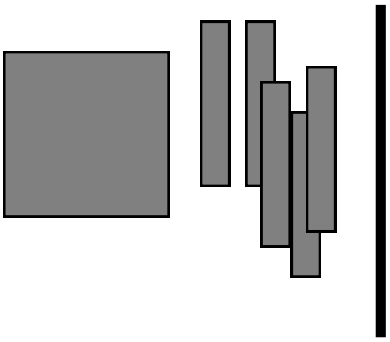
$$x = 3$$

Podemos complicar un poco la ecuación, como es el siguiente caso:

$$x^2 + 5x = 0$$

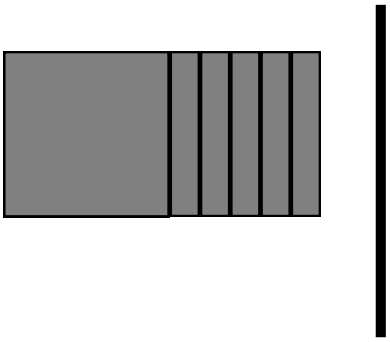
En esta situación consideramos las fichas correspondientes para establecer las dos áreas de trabajo:

$$x^2+5x=0$$



En cuyo caso no se podría formar un cuadrado, pero si un rectángulo:

$$x^2+5x=0$$



Pero esta área debe ser cero lo cual solamente se lograría si alguno de los lados es cero:

$$x = 0 \quad \text{"o"} \quad x + 5 = 0$$

de lo cual se deduce que las soluciones serían:

$$x = 0 \quad \text{"o"} \quad x = -5$$

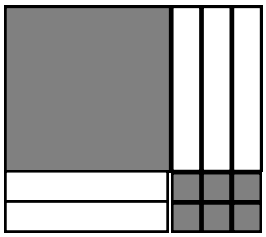
dado que en esta altura de tratamiento de contenidos ya se habrán trabajado las ecuaciones de primer grado.

Un caso un tanto más complicado sería:

$$x^2-5x+6=0$$

podemos intentar formar un rectángulo con las piezas y tendríamos:

$$x^2-5x+6=0$$



En cuyo caso el área sería cero si alguno de los lados fuera cero:

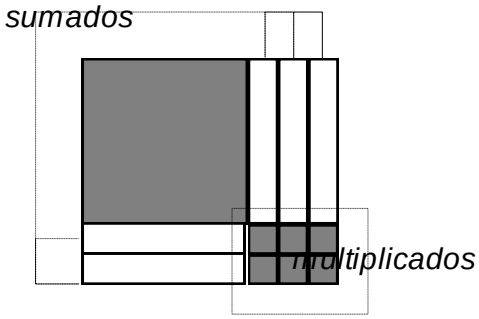
$$x - 3 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

Así que las soluciones serían:

$$x = -3 \quad \text{"o"} \quad x = -2$$

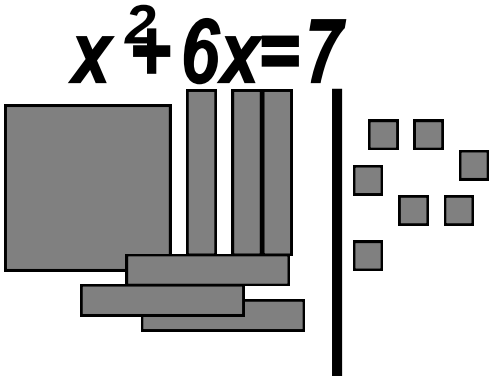
Obsérvese que de este tipo de caso queda clara aquella regla de que se "deben buscar dos números que sumados den -5 y multiplicados den 6, lo cual resulta obvio de la manera de formar el rectángulo:



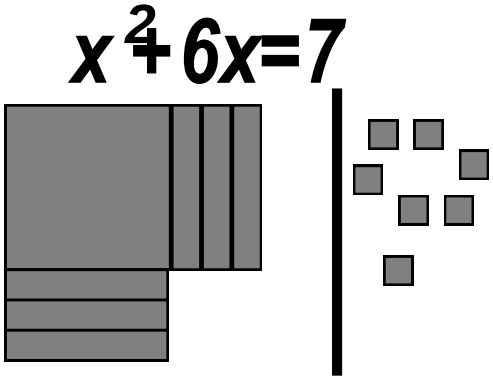
También esto puede conducir a la formación de un cuadrado como es el caso:

$$x^2+6x=7$$

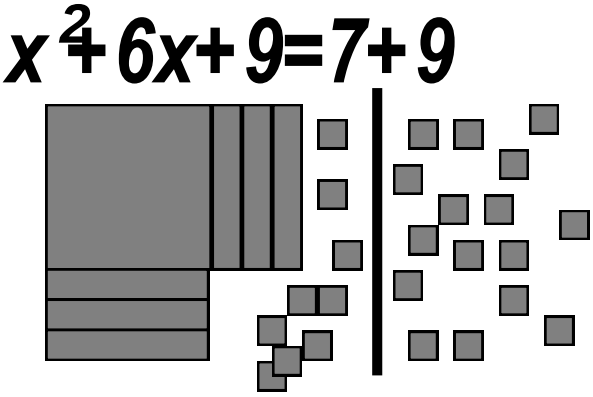
Representamos cada parte con los Bloques de Dienes:



Se intenta formar un cuadrado con las piezas del lado izquierdo:



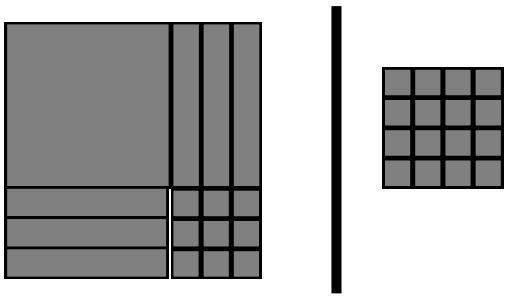
Pero se obseva que está “incompleto”, para completarlo hay que agregar justamente nueve cuadrados pequeños:



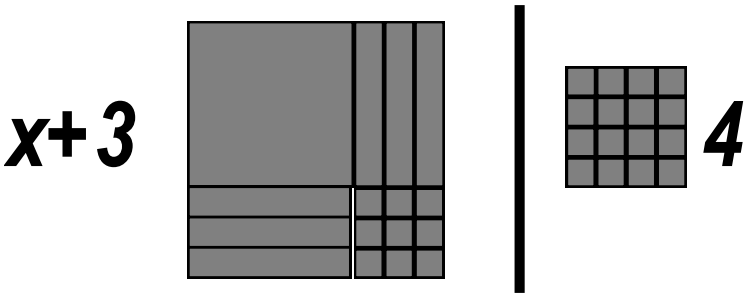
Se puede hacer notar en este paso que se agregaron tantos cuadrados como la mitad del coefciente de la x al cuadrado, lo cual se puede hacer evidente despúes de analizar varios ejercicios similares

De tal modo que se forman en cada lado dos cuadrados:

$$(x+3)^2 = 16$$



De tal modo que para la igualdad de las áreas se de, será necesario que el lado del cuadrado del lado izquierdo sea 4:



De ahí que una solución se obtendría de:

$$x+3 = 4$$

Es decir:

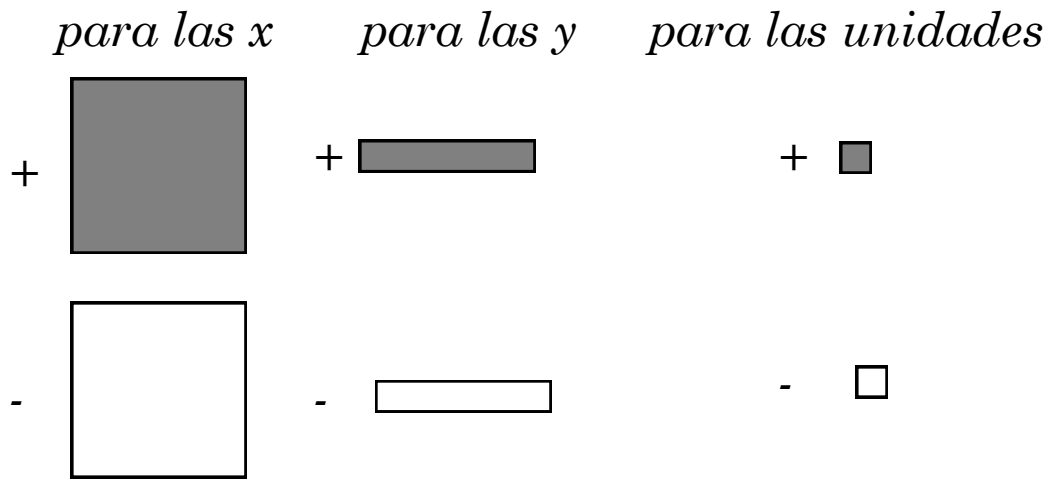
$$x = 1$$

Con un tratamiento numérico se puede enfocar el caso de la otra raíz.

Vale la pena resaltar que en este tipo de manipulaciones se puede reflejar fielmente lo que se hace con los símbolos matemáticos sin emplearlos y esto con toda seguridad ayudará al estudiante a formarse imágenes mentales que le ayudarán mucho a entender los procedimientos simbólicos.

Sistemas de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas

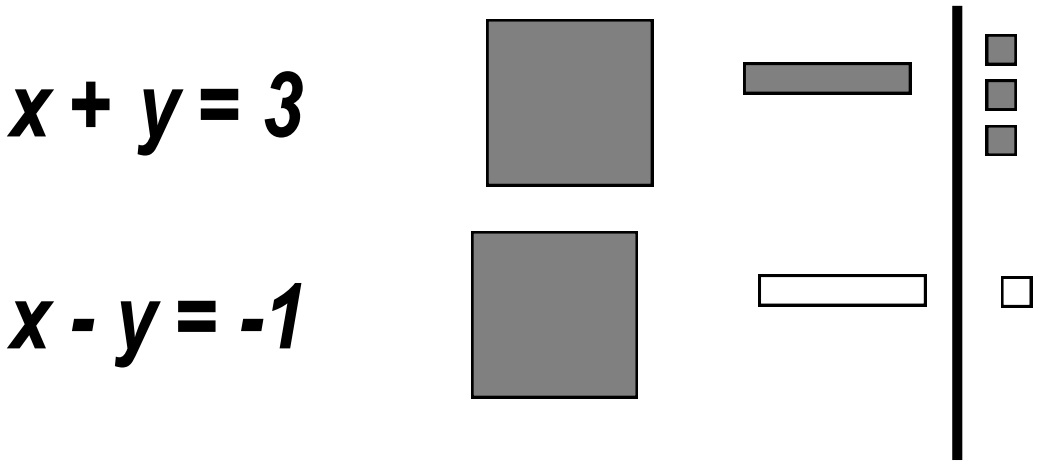
Para trabajar este tema tendríamos que hacer nuevas convenciones consideremos que los cuadrados grandes representan x y las regletas y, quedando los cuadrados pequeños para las unidades como los hemos estado utilizando:



De este modo podemos abordar sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, como el siguiente:

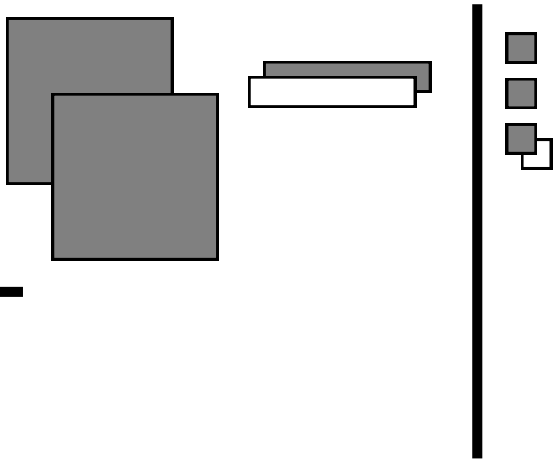
$$x + y = 3$$
$$x - y = -1$$

representamos la situación con los bloques y obtenemos:



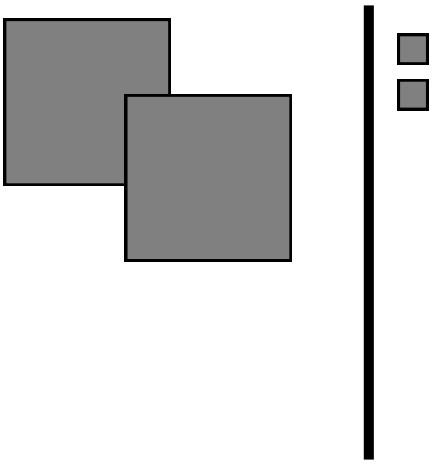
Ahora sumemos lo que tenemos de cada lado:

$$\begin{array}{r} x + y = 3 \\ + \quad x - y = -1 \\ \hline \end{array}$$



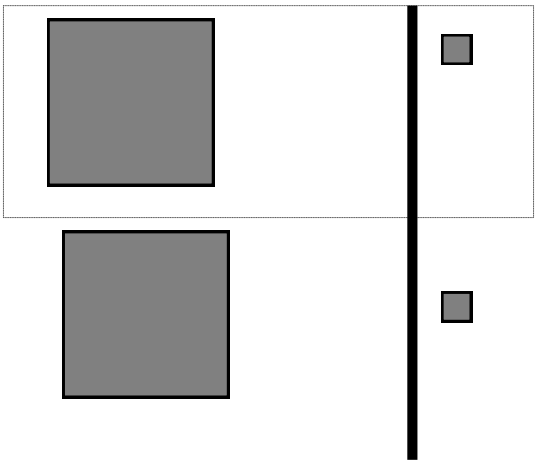
El resultado será:

$$\begin{array}{r} x + y = 3 \\ + \quad x - y = -1 \\ \hline 2x \qquad = 2 \end{array}$$



Y repartiendo cada unida a cada x tenemos:

$$x = 1$$

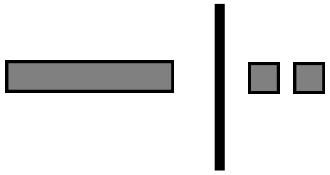


De la primera ecuación podemos substituir la parte de x por las unidades que se encontraron y obtenemos:

$$1 + y = 3$$

Lo cual resolviendo nos da un valor para *y* de:

$$y = 2$$



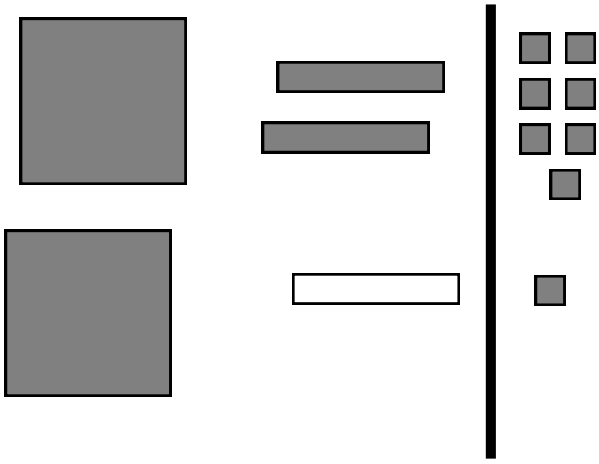
Como podemos observar se siguen desarrollando los mismos pasos que el método de suma y resta, pero veamos otro ejemplo:

$$x + 2y = 7$$
$$x - y = 1$$

Al representar con los bloques este caso obtenemos:

$$x + 2y = 7$$

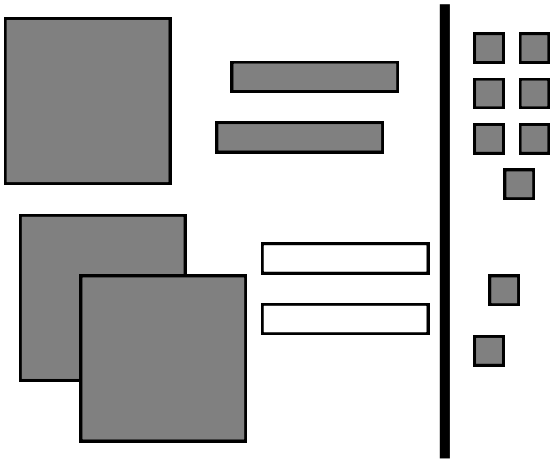
$$x - y = 1$$



Para cancelar sumando debemos tener las mismas *y* en la primera y segunda ecuación, para lograr este propósito se duplican las *y* de la ecuación de abajo, pero esto implica duplicar todo lo de esta ecuación ¡Hay que ser parejos!

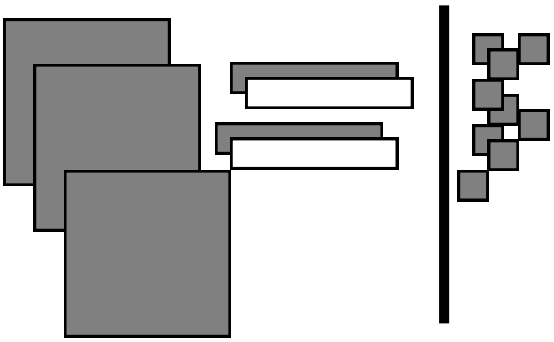
$$x + 2y = 7$$

$$2x - 2y = 2$$



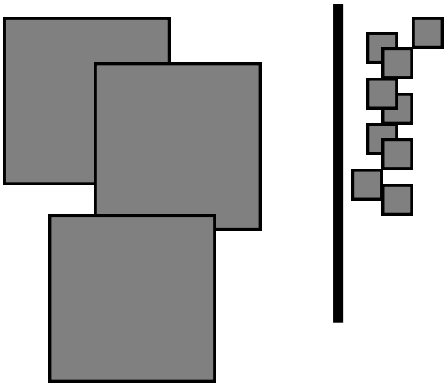
Ahora sumamos:

$$\begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ + \; 2x - 2y = 2 \\ \hline \end{array}$$



El resultado será:

$$\begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ + \; 2x - 2y = 2 \\ \hline 3x \qquad = 9 \end{array}$$



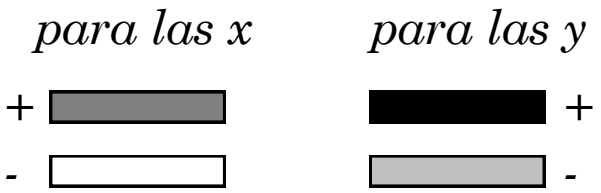
De ahí que:

$$x = 3$$

y sin muchos problemas obtendríamos:

$$y = 2$$

Es posible desarrollar esta parte de otra forma si construimos regletas de cuatro colores, dos de ellos destinados a las x "positivas" y "negativas" y los otros dos a las y "positivas" y "negativas".



La forma de trabajo sería muy similar a la expuesta anteriormente y evitaría modificar las convenciones sobre el papel de los cuadrados grandes. En realidad es cuestión de gustos y de probar una y otra forma.

Consideraciones finales

El maestro tiene que diseñar sus actividades, no puede dejar a la imaginación el caso que se va a analizar por que esto puede provocar problemas fuertes, esto hace muy importante la planeación que se haga del manejo de los materiales y las secuencias que conformarán la actividad, dado que no se puede dejar a los estudiantes que exploren con libertad por la libertad misma, se debe orientar de alguna manera su actividad para obtener los resultados que se esperan y luego ellos mismos harán otro tipo de exploraciones lo queramos o no, olo cual generará algunas preguntas.

Conviene señalar que un inicio muy bueno es el pedir a los estudiantes, antes de iniciar la búsqueda de la solución que planteen una estimación y la argumenten, esto permitirá que analicen las relaciones que se expresan en las ecuaciones y les ayudará a comprender lo que se plantea.

Vale la pena insistir que el material no substituye la intervención del maestro, sólo es un posible apoyo, el cual puede resultar contraproducente si no utiliza con una planeación adecuada. Por otra parte, el material en sí no genera los conceptos matemáticos, ayuda a que éstos se conformen, pero no es un substituto de la matemática dado que tienen posibilidades de aplicación limitadas.

Sería un error quedarnos en lo que se puede hacer con el material, la matemática es algo más amplio y este tipo de sugerencias sólo son aconsejables para tener algunos referentes para la construcción de conceptos o procedimientos, después se deben realizar actividades con otros materiales o pasar al manejo operativo, lo cual será establecido sobre otras bases, dado que el estudiante tuvo la oportunidad de "dar sentido" a algunos procesos abstractos.

Existen diversos materiales para impulsar el aprendizaje de la aritmética y el álgebra, los Bloques de Dienes son sólo una opción, por ello queda al lector ensayar nuevos procedimientos, incluso en torno a los mismos manipulativos. A pesar de ello, hemos insistido en matebloquemática I y II

en el manejo de los Bloques de Dienes por que es un material que se puede aplicar en diversos temas y eso ayuda a tener una continuidad en la enseñanza, dado que se trabajan desde temas de aritmética sencillos hasta temas de álgebra como los que se han trabajado en esta parte y que presenta grados de dificultad altos para los estudiantes.

También es importante mencionar que los Bloques se deben manipular, es decir, no es conveniente trabajar este tipo de actividades por medio de figuras o dibujos en el pizarrón sin que los estudiantes los puedan tocar y hacer ensayos con ellos, de hacerlo así tanto el maestro como los estudiantes se enfrentarán a situaciones engorrosas y traumantes que terminarán por abandonar en la primera oportunidad. Se aconseja que el maestro diseñe sus propios bloques y pida a los estudiantes que elaboren los suyos, lo único que se requiere es de material rígido como cartón, madera, acrílico y otro tipo de material.

¡Pasar la clase dibujando cuadrados y regletas puede ser odioso y no vale la pena, lo divertido será manejar los materiales en vivo y en directo!

Buscar otras formas de realizar las actividades es fundamental para realizar la labor docente. En este punto tal vez no se nos ocurran nuevas formas de trabajo pero si observamos lo que hacen los estudiantes obtendremos con seguridad muchas ideas y procedimientos alternativos que seguramente enriquecerán nuestros conocimientos y estrategias.

Bibliografía:

Dienes, Z (1972); *Algebra*; Varazán

Howden, H.; *Algebra Tiles for the Overhead Projector*; Cuisenaire

Dreyfous, R.; *Algebloks, user´s manual*; Dreyfous & Assoc.