¿Es Necesaria La Propiedad Reflexiva En La Definición De Orden?

Carlos Julio Luque Arias

Profesor Universidad Pedagógica Nacional

Grupo de Algebra. Universidad Pedagógica Nacional

Haydee Jiménez Tafur

Grupo de Algebra. Universidad Pedagógica Nacional

Estudiante de maestría en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia.

Jaime Fonseca González

Grupo de Algebra. Universidad Pedagógica Nacional

Profesor Universidad Manuela Beltrán.

Introducción

“En esa época ya todo estaba hecho y todo descubierto. Hablo de mi infancia. Las matemáticas y el catecismo no admitían discusión. Ambas eran cosa seria. Se decía inclusive, de manera muy sabia”con esas cosas no se juega”. La religión y la aritmética tenían sus dogmas. Sus leyes no eran perversas se imponía con argumentos de aspecto razonable. Los sistemas numéricos y las tablas de la ley eran útiles, indiscutibles, aprovechables, simples y duraderos.

Con el pasar del tiempo llegué a palpar un hecho inmenso: en ese universo, en su construcción y en su estructura yo no había participado por razones inexplicables, yo había llegado tarde; todo estaba hecho. Sin embargo si sentía que someterme a lo dicho me costaba, aprender las operaciones aritméticas fue, yo lo recuerdo con resquemor, una tarea dolorosa a pesar de la ayuda.

La mente marcha mejor cuando inventa que cuando recicla, o por lo menos el cuerpo está más cómodo ¿Cómo se llegó al extremo de plantear problemas de aritmética que yo, en mi inocencia, debía resolver? ¿Qué extraño duende ayudó a los que me precedieron a implantar obstáculos que yo debía sobrepasar? ¿Quien inventó tanta cosa? siendo ya difícil la vida, como si se tratase de complicarla.

Mas tarde me di cuenta de otro hecho; yo debía aprender a la velocidad que los otros fijaban. Yo sé que eso forja. Arrecia el alma, que la vida es dura, pero, insisto, otros marcaban las jornadas, los temas, su profundidad, y en muchos casos se callaron su trascendencia.

¿Cuántas generaciones recibieron ese trato, cuantas lo sufrieron y cuanto esperaron para someter a lo mismo a la próxima generación?

Esas inquietudes se vuelven tozudas con el tiempo, y un día cuando ya pude gobernar mi alimentación, me di a la tarea de aprender de a pocos, con gusto y con lo mío. Para quedar contento y saciado, ser participe en la formación del mundo. Así parezca una quimera: en una parte del mundo que yo soy, he de participar en su formación.

No es mal, porque yo lo diga, un método de enseñanza y tan no lo es, que fue con todo lo que aprendí que logré reaccionar. Hay varios recuerdos nítidos del jovencito que fui, en los que siento la necesidad de cambiar. Hay el deseo, por ejemplo, de volver ameno el aprendizaje. Hay más tarde, la oportunidad de volverlo más mío.

Más tarde, también, el deseo de enseñar, para aprender; poco a poco, voy precisando casi sin decirlo, cuándo siento que algo es trascendente.

Luego un día exagero al punto que no acepto me enseñen un tema sin haber hecho un acto de balance ceñudo de lo que de ello sé".

Carlos Ruiz

¿Religión? $a + bi$?,

$x \in A$?,
base 10?
Divisibilidad en base K?
lógica bivalente?
Relaciones?

El proceso de ordenar

1. Propiedades que caracterizan un orden:

1.1. Ejemplos de ordenaciones:

1. El *orden cronológico lineal* presente en las competencias deportivas, en la sucesión de eventos históricos de una familia, una sociedad o un país.
2. El *orden definido por las magnitudes* de las cosas, presente en las ordenaciones por estatura (creciente o decreciente) de algunas personas, en general ordenaciones por longitud, área, volumen, o cualquier otra magnitud.
3. El *orden definido por la distancia* entre dos o más puntos de algún espacio, como se ordenan los planetas por su distancia media al sol.
4. El *orden definido en los conjuntos numéricos* como números reales, racionales y enteros a partir de un conjunto de números positivos
5. El *orden alfabético* definido sobre las palabras de un idioma, usando el orden de las letras del abecedario, que aparece en el directorio telefónico y que nos permite encontrar cualquier nombre con relativa rapidez.

6. El *orden de contenencia de conjuntos* definido sobre el conjunto de partes de un conjunto cualquiera.

7. El *orden definido por la noción de cantidad* o número de elementos en un conjunto de objetos.

8. El *orden de divisibilidad* definido en los números naturales.

Varios significados de orden:

1. Ordenar es establecer cuando un elemento de un conjunto A *es mayor* que otro, *está adelante* de otro, o *es más* que otro en algún sentido; en este caso se comparan *dos* elementos, en ningún caso un elemento *a* es mayor que el mismo, o sea, para todo *a* en A, no es cierto que $(a, a) \in R$), en símbolos

$$(\forall\, a \in A)\ (\neg\ ((a, a) \in \mathrm{R}))$$

esto es, un *orden* debe ser *irreflexivo*.

Al comparar *dos* elementos, en ningún caso sucede que un elemento *a* sea mayor que otro y a su vez el segundo sea mayor que el primero, o sea, para todo *a*, *b* en A, no es cierto que $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$, en símbolos

$$(\forall\, x, y \in A)(\ \neg\ ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in \mathrm{R}))$$

lo que significa que un orden debe ser *estrictamente anti simétrico.*

Al comparar *tres* elementos, si uno es mayor que otro y éste a su vez es mayor que un tercero, es necesario que el primero sea mayor que el tercero, es decir que debemos tener la propiedad *transitiva*. A este tipo de orden lo llamaremos un *orden estricto.*

Ejemplos de este tipo de orden están en: el *orden cronológico lineal* donde no hay manera de establecer la simultaneidad real de dos eventos; en el *orden definido por las magnitudes* y en el *orden definido por la distancia*, como en el caso anterior, no hay exactitud experimental que permita establecer la igualdad de dos magnitudes o de dos distancias.

2. Ordenar incluye que un elemento sea *mayor o igual* que otro o *menor o igual* que otro, por incluir la igualdad, esta noción de orden es *reflexiva*, *antisimétrica* y *transitiva*. Ejemplos de esta noción de orden son: el *orden alfabético* puesto que una palabra puede ser igual a otra, el *orden de contenencia de conjuntos* donde un conjunto está contenido en sí mismo, el *orden de divisibilidad* definido en los números naturales donde cada número es divisible por sí mismo.

3. Al ordenar los elementos de un conjunto si consideramos dos elementos cualesquiera del conjunto o son el mismo o uno es mayor que el otro o el otro es mayor que el uno, estos órdenes cumplen la propiedad de *tricotomía*, esta propiedad implica que dados dos elementos cualesquiera del conjunto o uno es menor o igual que otro o es mayor o igual que el otro. Ejemplos de este tipo de orden son: el *orden cronológico lineal*, el *orden definido*

por las magnitudes, el *orden definido por la distancia* y el orden definido en los conjuntos numéricos como los números naturales, enteros, racionales o reales. Estos órdenes se llaman *órdenes totales*.

4. Al ordenar los elementos de un conjunto si consideramos dos elementos cualesquiera del conjunto, no todos los elementos están relacionados, por ejemplo el *orden de contenencia de conjuntos* y el *orden de divisibilidad* en N. Estos son *órdenes parciales*.

Con esta variedad en lo que podemos llamar orden, presentaremos varias nociones relacionadas, iniciando con las más simples.

1.2 Pre orden estricto

Una relación en un conjunto A que sea transitiva la llamaremos un *pre orden estricto u orden débil.*

Ejemplos

1. Sea A = {0, 1, 2, 3}, la relación R= {(0, 1), (1, 2), (0, 2)} de A es un preorden estricto.

2. En un conjunto A, la relación idéntica $\Delta_A = \{(x, x) \in A \times A : x \in A\}$ y todos sus subconjuntos son pre ordenes estrictos.

3. Sea S un semigrupo (con notación multiplicativa) y a, b en S, la relación < definida en S como

$a < b$ si y sólo si existe $x \in S$ tal que $ax = b$. es un preorden estricto.

Prueba: Supongamos que $a < b$ y $b < c$, luego existen x, y en S tales que $ax = b$ y $by = c$. Ahora operamos con y a ambos lados de la igualdad $ax = b$, con lo que obtenemos que $a(xy) = by = c$, por tanto $a < c$, es decir, tenemos que la relación < es transitiva.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2x2}(\mathbb{N}) \right\}$$ con la multiplicación usual de matrices.

para todo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S$ tenemos que $\mathbf{A} < \mathbf{0}$ y

para todo $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ con $b \neq 0$, obtenemos que $\neg(\mathbf{A} < \mathbf{B})$ y $\neg(\mathbf{B} < \mathbf{A})$, es decir, $(\mathbf{A} < \mathbf{B}) \downarrow (\mathbf{B} < \mathbf{A})$.

4. El conjunto de los números duales D es el conjunto de todas las parejas (x, y) de números reales que se suman componente a componente y se multiplican de acuerdo a:

$$(x, y) \times (u, t) = (xu, xt + yu).$$

El conjunto D de los números duales con estas dos operaciones no es un campo, como el de los números complejos, pues no todos los elementos diferentes de $\mathbf{0} = (0, 0)$ tienen inverso multiplicativo, pero sí es un anillo conmutativo con elemento idéntico (1, 0). Si x es un número real, con $x \neq 0$, el inverso multiplicativo de (x, y) es $(x, y)^{-1} = (x^{-1}, -yx^{-2})$. Los elementos de la forma $(0, y)$ son *nilpotentes*, es decir, $(0, y)^2 = (0,0)$.

Si notamos $n = (0, 1)$ e identificamos $(x, 0) = x(1, 0)$ con el número real x, obtenemos que $n^2 = 0$ y podemos escribir $(x, y) = x + n\,y$.

Llamaremos un *conjunto H de números D-Positivos* de D si se cumple:

1. Si a y b pertenecen a H entonces $a + b$ y ab pertenecen a H.
2. Si a es un número dual, se cumple exactamente una de las tres situaciones: $a \in H$, $a^2 = 0$, $-a \in H$

Si H es un conjunto de números D-Positivos de D, en el conjunto de los números duales, se forman tres conjuntos disyuntos:

$$H \quad K = \{a \in \mathrm{D} : -a \in H\} \quad N = \{a \in \mathrm{D} : a^2 = 0\}.$$

Definimos para todo a, b en D, $a < b$ si y solo si $b - a \in H$. $a > b$ si y solo si $b < a$

Si $a < 0$ se dice que a es D-Negativo. La relación < en D es transitiva y por lo tanto es un preorden estricto para D, pues para todo a, b en D, si $a < b$ y $b < c$ entonces $b - a \in H$ y $c - b \in H$, por tanto su suma $(b - a) + (c - b) \in H$, es decir $c - a \in H$, luego $a < c$.

Sea A un subconjunto de un conjunto X, se cumple lo siguiente:

Teorema 1: Si la relación R de A es pre orden estricto, entonces la relación recíproca $R^{!}$ de R también es un pre orden estricto.

1.3 Relaciones de orden estricto

Llamaremos *relación de orden estricto* a una relación transitiva y estrictamente antisimétrica, esto es, una relación R en un conjunto X es un *orden estricto* si satisface las condiciones siguientes.

1. $(\forall\, x, y \in A)\ ((x, y) \in R$ □ $((y, x) \in R))$.
2. $(\forall\, x, y, z \in A)\ ((x, y) \in R \wedge ((y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R))$. donde | representa la barra de Sheffer. Sea A un subconjunto de un conjunto X, se cumple lo siguiente: **Teorema 2:** Toda relación de orden estricto es irreflexiva.

Teorema 3: Si R es una relación orden estricto en A entonces la relación recíproca $R^{!}$ de R también es un orden estricto.

Teorema 4: Si R es una relación de orden estricto entonces R no es una relación total.

Teorema 5: Si R es una relación irreflexiva y transitiva en A, entonces R es una relación asimétrica, es decir, es un orden estricto.

Ejemplos

1 En el conjunto vacío la relación vacía es un orden estricto.
2 En conjunto con un elemento $A = \{0\}$, la relación vacía es estrictamente antisimétrica y transitiva luego es un orden estricto.
3 En un conjunto con dos elementos $A = \{0, 1\}$, las relaciones

$$R_0 = \emptyset$$
$$R_1 = \{(0, 1)\}$$
$$R_2 = \{(1, 0)\}$$

son órdenes estrictos.

4. En un conjunto con tres elementos A= {0, 1, 2} las relaciones:

R	0	1	2	*S*	0	1	2	*S*	0	1	2	*S*
0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
2	0				0				0			

son órdenes estrictos.

5. En el conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$, las siguientes relaciones son órdenes estrictos

$R_1 = \{(a, o), (o, u), (a, e)\}$ $R_2 = \{(o, i), (e, e), (o, u), (e, a)\}$

6. El orden estricto aditivo en los números naturales N* iniciando en 1.

Axiomas:

A1. 1 es un número natural A2. Para cada número natural *a* existe exactamente un número natural, llamado el *sucesor* de *a*, que notaremos a^+. A3. Para todo número natural *a* se tiene que $a^+ \neq 1$.

A4. Si $a^+ = b^+$ entonces $a = b$. A5. Si un subconjunto A de los números naturales tiene las

siguientes propiedades:

I. 1 pertenece a A

II. Si *a* pertenece a A entonces a^+ pertenece a A entonces A tiene a todos los números naturales.

Teoremas

Usando estos axiomas podemos demostrar que cada par de números *a*, *b*, existe un único número natural que corresponde a la suma de *a* y *b*, notado $a + b$, tal que

1 $a + 1 = a^+$

2 $a + b^+ = (a + b)^+$.

Para todo número natural *a*, *b*, *c* se cumplen las leyes asociativa, conmutativa y cancelativa de la adición.

Demostremos esta última. **Teorema 2.1**. **Propiedad cancelativa de la adición**: Si $b \neq c$ entonces $b + a \neq c + a$. **Teorema 2.2.** Para todo número natural *a*, *b* se cumple $b \neq a + b$.

Prueba: Fijemos *a*, y sea *M* el conjunto de todos los *b* para los cuales la afirmación es válida. I) Por el Axioma A3, $1 \neq a^+$, es decir $1 \neq a + 1$, luego $1 \in M$. II) Si *b* pertenece a *M*, entonces $b \neq a + b$ de donde $b^+ \neq (a + b)^+$ es decir que $b^+ \neq a +$

b^+, y por lo tanto $b^+ \in M$ y la afirmación es válida para todo número natural *b*.

Una consecuencia importante del teorema 2. 2 es

Teorema 2.3: Dados números naturales *x* y *y*, sólo sucede uno de los siguientes casos: 1) $x = y$. 2) Existe un único *u* tal que $x = y + u$. 3) Existe un único *v* tal que $y = x + v$.

Decimos que *a es estrictamente menor b* (o también que *b es estrictamente mayor que a*) y lo notamos $a < b$ (respectivamente $b > a$) si y solo si existe un número natural c tal que $a + c = b$.

Teorema 2.4: (Transitividad del orden estricto en N*) Para todo número natural a, b, c se tiene que si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Prueba: Si $a < b$ entonces existe un número natural k tal que $a + k = b$, y si además $b < c$, existe también un número natural d tal que $b + d = c$. Reemplazando b en la segunda igualdad, obtenemos

$$(a + k) + d = c$$

aplicando la propiedad asociativa de la adición, la igualdad se convierte en

$$a + (k + d) = c$$

lo que significa que $a < c$, puesto que $(k + d)$ es un número natural.

Teorema 2.5: (Asimetría del orden estricto en N*) Para todo número natural a, b se tiene que si $a < b$ entonces $\neg (b < a)$.

Teorema 2.6: (Tricotomía del orden estricto en N*). Para cualesquiera a, b números naturales se tiene exactamente uno de los casos $a = b$, $a > b$, $a < b$.

Teorema 2.7: Para todo número natural a, b se cumple que $a + b > a$.

El orden estricto cumple una propiedad similar a la propiedad cancelativa de la adición:

Teorema 2.8: Si $a + c < b + c$, entonces $a < b$.

Otra propiedad que se deduce del orden estricto de los números naturales es que entre un número cualquiera a y su sucesor a^+ no existe otro número natural, esto lo expresamos diciendo

Teorema 2.9: Para todo número natural a no existe un número natural b tal que $a < b < a^+$.

Prueba: Sea a un número natural, supongamos que existe un número natural b tal que $a < b < a^+$, entonces existen números c y d tales que

$$a + c = b \text{ y } b + d = a^+$$

reemplazando la primera igualdad en la segunda obtenemos

$$(a + c) + d = a^+ = a + 1$$

y por las propiedades asociativa y cancelativa concluimos que $c + d = 1$, lo que es imposible porque 1 no es sucesor de número alguno.

Teorema 2.10: (Monotonía de la adición con el orden estricto en N*).

Dados números naturales cualesquiera $a, b, c, d,$ si $a < b$ y $c < d$ entonces: $a + c < b + d$ **Teorema**

2.11: *Para todo a, b, c, números naturales cualesquiera, si* $a < b$ *entonces:* $a + c < b + c$

7. El orden estricto aditivo en los números reales $\Re$.

7.1 *Axiomas de campo para los números reales* $\Re$

En el conjunto de los números reales $\Re$ están definidas dos operaciones la adición (+) y la multiplicación, ellas satisfacen los siguientes axiomas: La pareja (R, +) es un grupo abeliano, esto significa que

C1. Si a, b son números reales, entonces $a + b$ es un número real. C2**.** *Propiedad asociativa de la adición*: Si a, b, c son números reales, entonces $a + (b + c) = (a + b) + c.$ C3. Existe un elemento idéntico para la adición en el conjunto de los números reales, que notamos 0 y es tal que para cualquier número real a se cumple que $a + 0 = 0 + a = a.$

C4. Para cada número real *a existe* un elemento que llamamos *inverso aditivo*, y notamos $-a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$. C5. *Propiedad conmutativa de la suma*: Si a, b son números reales, entonces $a + b = b + a.$

La operación que llamamos multiplicación y que notamos con el signo ×, es tal que la pareja (R – {0}, ×) es un grupo abeliano, esto significa que:

C6. Si a, b son números reales, entonces $a \times b$ es un número real.

C7**.** *Propiedad asociativa de la multiplicación*: Si a, b, c son números reales, entonces $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c.$ C8. *Existe un elemento idéntico para la multiplicación el conjunto de los números reales*, diferente de cero, que notamos 1, tal que para cualquier número real a se cumple que $a \times 1 = 1 \times a = a.$

C9. *Para todo número real a diferente de cero* ($a \neq 0$) *existe* un número real que llamamos *el inverso multiplicativo* de a y notamos a^{-1} o $\frac{1}{a}$, de tal manera que $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1.$

C10. *Propiedad conmutativa de la multiplicación:* Si a, b son números reales, entonces $a \times b = b \times a$.
C11. *Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma de números reales:* Esta propiedad establece un vínculo entre las dos operaciones, si a, b, c son números reales, entonces: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

La igualdad entre números reales *es compatible* o *estable* con las operaciones en el sentido de que

Para todo a, b, c, d números reales, si $a = b$ y $c = d$ entonces $a + c = b + d$ y $a \times c = b \times d$.

7.2. *Definiciones algebraicas*: si a, b son números reales, definimos la *sustracción* entre a y a 1

b por $a - b = a + (-b)$ y la *división* entre a y b por = a × , siempre que b no sea 0.
bb

7.3. *Teoremas algebraicos*

1 El elemento idéntico de la suma, el cero 0, determinado en el axioma C3 es único.
2 El elemento idéntico de la multiplicación, el uno 1, es único.
3 *Propiedad cancelativa de la adición:* Si a, b son números reales y $a + b = a + c$ entonces $b = c$.
4 *Propiedad cancelativa de la multiplicación*: Para todo a, b y c números reales si $a \times b = a \times c$ con $a \neq 0$, entonces $b = c$.
5 El inverso aditivo de un número real es único.
6 El inverso multiplicativo de un número real es único.
7 Para todo par de números reales a y b, si $a + b = 0$ entonces $b = -a$. 1
8 Para todo par de números reales a y b, si $a \neq 0$ y $a \times b = 1$ entonces b = .

a

1. Para todo número real a se tiene que $0 \times a = 0$.
2. Para todo número real a se tiene que $a = -(-a)$. 1
3. Para todo número real a se tiene que, si $a \neq 0$, entonces = a .

1

a

1. Para todo par de números reales a y b se tiene que $-(a + b) = (-a) + (-b)$. 1 11
2. Para todo par de números reales a y b diferentes de cero se tiene que =× .

$a \times b$ ab

1. Para todo par de números reales a y b se tiene que $(-a) \times b = -(a \times b)$.
2. Para todo par de números reales a y b se tiene que $(-a) \times (-b) = a \times b$.
3. Para todo a, b y c números reales se tiene que $(a - b) + (b - c) = a - c$.
4. Para todo a, b y c números reales se cumple que $a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$.
5. Para todo a y b números reales se tiene que $a = b$ si y sólo si $-a = -b$.
6. Para todo número real a se cumple que $-a = (-1) \times a$.
7. Para todo par de números reales a y b existe un número real x tal que si $a + x = b$ entonces $x = b - a$.

21. Para todo número real a si $a \times x = b$ y $a \neq 0$ entonces $x = \frac{b}{a}$.

22. Para todo número real a se cumple que si $a \neq 0$, entonces $\frac{1}{a} \neq 0$.

23. Para todo par de números reales a y b se cumple que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $a \times b \neq 0$ o equivalentemente si $a \times b = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$.

24. Si a, b, c, d son números reales, b y d son diferentes de cero, y si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $a \times d = b \times c$.

25. Si a, b, c, d son números reales, b y d son diferentes de cero, entonces $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$.

26. Si a, b y c son números reales, $b \neq 0$ y $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$.

27. Si a, b, c y d son números reales, con $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$.

28. Si a, b, c son números reales y $c \neq 0$, entonces $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}$.

29. Si a, b, c, d son números reales, $c \neq 0$ y $d \neq 0$ entonces $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{c \times d}$.

30. Si a, b, son números reales y $b \neq 0$ entonces $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ si $b \neq 0$.

7.4. *Axiomas de orden para los números reales* $\Re$

Suponemos la existencia de un subconjunto **P** de *números positivos*. O1. Si a y b pertenecen a **P** entonces $a + b$ y ab pertenecen a **P**. O2. Si a es un número real, se cumple exactamente *una* de las tres situaciones:

$$a \in \mathbf{P},\ a = 0,\ -a \in \mathbf{P}.$$

7.5. *Definición de orden estricto para* $\Re$ Usando el conjunto de los números positivos definimos para dos números reales cualesquiera las relaciones: $a < b$ significa que $b - a \in \mathbf{P}$ $a > b$ significa que $b < a$

Si $a < 0$ decimos que a es *negativo.*

7.6. *Teoremas de orden*

Teorema O1: (Transitividad de la relación < en $\Re$).

La relación $<$ en $\Re$ es transitiva; es decir, que si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

Prueba: Si $a < b$ y $b < c$ entonces $b - a \in \mathbf{P}$ y $c - b \in \mathbf{P}$, entonces su suma $(b - a) + (c - b) \in \mathbf{P}$, es decir $c - a \in \mathbf{P}$, por lo tanto $a < c$.

Teorema O2: (Asimetría del orden estricto en $\Re$). Para todo número natural a, b se tiene que si $a < b$ entonces $\neg (b < a)$.

Prueba: Por el axioma O2, para el número $b - a$ sólo se cumple una de las siguientes condiciones $b - a > 0$, $b - a = 0$, $b - a < 0$. lo que significa que si $a < b$ entonces $\neg (b < a)$.

Los teoremas O2 y O3 implican que la relación $<$ es un orden estricto en $\Re$.

Teorema O3: (Tricotomía del orden estricto en $\Re$).

Si a y b son números reales, se cumple exactamente *una* de las siguientes situaciones: $a < b$, $a = b$, $b < a$. **Teorema O4:** Si a, b, c son números reales y $a + c < b + c$, entonces $a < b$.

Teorema O5: Para todo a, b, c, números reales cualesquiera, si $a < b$ entonces $a + c < b + c$.

Teorema O6: (Monotonía de la adición con el orden estricto en $\Re$).

Dados números reales cualesquiera a, b, c, d, si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.

Teorema O7: (Monotonía de la multiplicación con el orden estricto en $\Re$).

Dados números reales cualesquiera a, b, si $a < b$ entonces para todo real positivo c se cumple que $a\,c < b\,c$.

Prueba: Sean a, b, números reales y c un número real positivo, si $a < b$, entonces $(b - a) \in \mathbf{P}$ y como c es positivo $(b - a)\,c \in \mathbf{P}$, luego $(bc - ac) \in \mathbf{P}$**,** lo que significa que $a\,c < b\,c$.

Teorema O8: Dados números reales cualesquiera a, b, si $a < b$ entonces, para todo real negativo c se cumple que $a\,c > b\,c$.

7.7. *Otras propiedades del orden entre números reales*

Teorema O9: $1 > 0$. Esto significa que $1 \in$ P.

Prueba

Supongamos que $1 \notin P$ entonces, por el axioma O2 o bien $-1 \in P$ o $1 = 0$. Si $-1 \in P$ por el axioma O1, $(-1)(-1) \in P$ y por el teorema 15 tenemos que, $(-1)(-1) = 1 \times 1 = 1 \in P$, lo que contradice la hipótesis.

Si $1 = 0$ se contradice el axioma C8; por lo tanto $1 \in P$, o lo que es lo mismo $1 > 0$.

Teorema O10: Para todo número *a*, si $a > 0$ entonces $\frac{1}{a} > 0$.

Teorema O11: Para todo número *a*, si $a < 0$ entonces $\frac{1}{a} < 0$.

Teorema O12: Para todo par de números *a* y *b*, se cumple que si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $a \times b < 0$.

Teorema O13: Para todo par de números *a* y *b*, se cumple que si $a \times b > 0$ entonces ($a > 0$ y $b > 0$) o ($a < 0$ y $b < 0$).

Teorema O14: Para todo par de números *a* y *b*, se cumple que si $a \times b < 0$ entonces ($a > 0$ y $b < 0$) o ($a < 0$ y $b > 0$).

Teorema O15: Para todo número *a*, si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0$.

Teorema O16: Para todo par de números *a* y *b*, se cumple que si $a < b$ entonces $-a > -b$.

Teorema O17: (**La densidad del orden estricto en $\Re$**)

Para todo par *x, y* de números reales, si $x < y$, existe un número real *z*, tal que $x < z < y$. *Prueba:* Sean *x, y* números reales con $x < y$, por el teorema O5, tenemos que $x + x < y + x$

y también $x + y < y + y$, aplicando el axioma C5 y $2x < y + x < 2y$ y por los axiomas C7, C9 y el teorema O10, $x < \frac{y+x}{2} < y$, lo que significa que el número $z = \frac{y+x}{2}$ es tal que $x < z < y$.

En resumen, podemos demostrar que las propiedades algebraicas básicas del orden de los números reales se pueden demostrar, a partir de la definición de orden estricto, donde no es necesaria la propiedad reflexiva.

2. Relaciones de orden parcial

Una *relación de orden parcial* en un conjunto A, que usualmente notamos ($\leq$), es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Ejemplos

1. La relación idéntica es una relación de orden parcial.
2. La relación vacía en un conjunto vacío es un orden parcial.

3. Relaciones de orden a partir de órdenes estrictos

Teorema: Si $<$ es una relación de orden estricto en un conjunto A, entonces la relación $\leq$ definida por

$$a \leq b \text{ si y sólo si } a < b \text{ o } a = b \text{ es}$$

una relación de orden parcial.

Prueba: La relación $\leq$ es reflexiva porque contiene a la diagonal de A.

Es antisimétrica pues si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces no puede darse el caso de que $a < b$ y $b < a$ por ser $<$ estrictamente antisimétrica, luego necesariamente $a = b$.

Es transitiva pues si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces o bien $a < b$ y $b < c$, en cuyo caso $a < b$ por la transitividad de $<$; o bien se da una sola de las igualdades $a = b$ o $b = c$ y de nuevo $a \leq c$ por sustitución; o bien se tienen ambas igualdades $a = b$ y $b = c$ de donde $a = c$. En cualquier caso $a \leq c$, luego $\leq$ es transitiva.

4. Relaciones de orden estricto a partir de órdenes

Teorema: Si $\leq$ es una relación de orden en un conjunto A, entonces la relación $<$ definida por

$$a < b \text{ si y solo si } ((a \leq b) \wedge \neg (a = b))$$

es una relación de orden estricto.

Prueba: Si $a < b$ y $b < a$ entonces de $a \leq b$ y $b \leq a$ por la antisimetría de $\leq$ se sigue $a = b$, lo cual es absurdo. Luego $<$ es estrictamente antisimétrica.

De otro lado, si $a < b$ y $b < c$ entonces de $a \leq b$ y $b \leq c$ se sigue que $a \leq c$ y si $a = c$ entonces $a \leq b$ y $b \leq a$ de donde $a = b$, lo cual es absurdo. Así $a < c$ y la relación $<$ es transitiva.

Teorema: En cualquier conjunto A existe una correspondencia biyectiva y que preserva el orden de contenencia entre el conjunto de relaciones de orden sobre A y el conjunto de relaciones de orden estricto sobre A.

5. Otros órdenes estrictos para N

1. Todo número impar es menor que todo número par y entre ellos conservan el orden aditivo natural definido anteriormente, así: $1 < 3 < 5 < 7 < 9 < \ldots < 0 < 2 < 4 < 6 < 8 < \ldots$ Otro orden, un poco más curioso es:

$3 < 5 < 7 < 9 < \ldots < 3.2 < 5.2 < 7.2 < \ldots < 3.2^2 < 5.2^2 < 7.2^2 < \ldots < 2^3 < 2^2 < 2 < 1$ usado por Sarkovskii para resolver un problema de sistemas dinámicos

De manera que, “estrictamente hablando”, no hay ninguna razón técnica para incluir la reflexividad entre las condiciones que definen una relación de orden.