**II FORO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS**
**USCO 2009**

# DE LA ALGORITMÍA ARITMÉTICA A LOS PROCESOS DE GENERALIZACIÓN

**Eje temático:**

**La Formación Permanente Y Actualización De Los Maestros.**

**Ponentes:**


**GRUPO E.MAT.H (Educación Matemática en el Huila)**
**Universidad SURCOLOMBIANA**
**Avenida Pastrana Borrero Cra 1ª Neiva – Huila (Colombia)**
Grupo de investigación en Educación Matemática, adscrito al programa de Licenciatura En Matemáticas. Inscrito ante COLCIENCIAS y reconocido por nuestra institución. Entre los trabajos desarrollados se cuentan: -Sentido Y Uso Del Lenguaje Matemático En El Aula y -Estrategias De Mediación Pedagógica Para El desarrollo Del Pensamiento Matemático. En la actualidad trabajamos en un proyecto que busca conocer el estado del arte de la Educación Matemática en el Departamento Del Huila, con el fin de intervenir en la formulación de políticas que propendan por el mejoramiento continuo de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en nuestras instituciones educativas. Email: grupoe.mat.h@gmail.com

**JOSÉ ANTONIO ARDILA AMÉZQUITA**
Matemático Universidad Javeriana, Especialista en Matemática Avanzada Universidad Nacional de Colombia, Especialista en Dificultades del Aprendizaje Escolar Universidad Cooperativa De Colombia. Mas de 30 años de experiencia como docente de tiempo completo en la Universidad Surcolombiana. Coordinador del grupo E.MAT.H; amplia trayectoria como ponente en congresos organizados por diferentes Universidades y autor de varios artículos publicados en revistas de circulación nacional.
Teléfonos: particular: (098) 874 0618 celular: 317 668 3762 Universidad: (098) 875 4753. Email: josean@usco.edu.co

**MARTHA CECILIA MOSQUERA URRUTIA**
Licenciada en matemáticas Universidad Pedagógica Nacional, Especialista En Pedagogía para El Desarrollo Del Aprendizaje Autónomo Universidad Nacional Abierta y a Distancia, Magíster En Educación Universidad De La Sabana. Docente de tiempo completo en la Universidad Surcolombiana. Miembro activo del grupo E.MAT.H. Gestora del Modelo De Mediación Pedagógica Para El Desarrollo Del Pensamiento Matemático (UNAD 2003) merecedor de varios reconocimientos a nivel nacional e internacional por el impacto que genera en los niños y las niñas.
Teléfonos: particular (091)7404328 celular: 310 312 0548 Universidad: (098) 875 4753. Email: mcmosquera@usco.edu.co

**DE LA ALGORITMIA ARITMÉTICA A LOS PROCESOS DE GENERALIZACIÓN**

**Eje temático:**

**La formación permanente y actualización de los maestros.**

**CURSO-TALLER**

**RESUMEN:**

Tres aspectos derivados de la experiencia, motivan la elaboración del trabajo: Las dificultades en la enseñanza y aprendizaje de procesos fundamentales en la actividad de demostrar, el análisis de algoritmos propuestos en textos escolares y algunas formas de operar utilizadas por niños y adultos analfabetas, buscando proponer alternativas de solución.

## INTRODUCCIÓN

**De la algoritmia aritmética a los procesos de generalización** es un trabajo que surge de la observación consciente de la práctica pedagógica en busca de las razones por las cuales los aprendientes presentan tantas dificultades en la transición de la aritmética al álgebra, particularmente en lo que tiene que ver con el uso racional de los algoritmos propios de las operaciones aritméticas y su posterior aplicación en la deducción de fórmulas matemáticas (vistas como la representación de afirmaciones válidas para todos los números de un conjunto mediante expresiones que utilizan variables), con el fin de llamar la atención de los futuros docentes y de los docentes en ejercicio y generar reflexiones sobre algunos aspectos que frecuentemente olvidamos tener en cuenta, mostrando alternativas de trabajo para el aula regular, que podrían ayudar a superar algunas de estas dificultades.

Esperamos aportar desde nuestra experiencia algunos elementos de reflexión sobre ¿cuál debe ser la acción del docente para que el aprendiente desarrolle pensamiento matemático¿

## PRIMERA PARTE

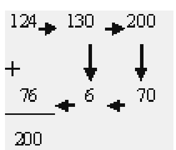
### “Algoritmos Para Las Operaciones En N”

*“El conocimiento matemático para el analfabeta tiene una importancia vital”*

***Por: José Antonio Ardila Amézquita***

Los ejemplos que aquí presento fueron aprendidos al observar los razonamientos tanto de adultos analfabetas, como de niños en etapa de escolaridad; para la multiplicación retomo una de las formas tradicionales que se encuentran en textos para la enseñanza de la matemática para presentar una variante que considero hasta ahora es mi aporte.

**La resta:** con un billete de $200 pesos paga $124 pesos. ¿Cuánto queda?




Un adulto analfabeta razona de la siguiente manera: (el esquema de la izquierda no lo hace él, sólo se muestra para representar su forma de operar) se puede observar además que el esquema permite la verificación del problema y su respuesta que es 76 pesos.

**La Multiplicación:** en algunos textos de matemáticas se encuentran ejemplos como este: 32 x 24 = 32 x (20 + 4) = 32 x 20 + 32 x 4 = 640 + 128 = 768 en este proceso aparece la descomposición de números y la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición, el algoritmo que sugiero empieza por dividir el problema en dos partes:

| 32 x 4 (el resultado de esta multiplicación son las unidades) | 32 x 2 (el resultado de esta multiplicación son las decenas) |
|---|---|
| Ahora 32 x 4 = 32 + 32 = 64 (dos veces)<br><u>+ 64</u> (dos veces)<br>128 (cuatro veces)<br><br>Y 32 x 2 = 64 (ya está calculado) | Para obtener finalmente:<br>32 x 24 = 128 (unidades) + 64 (decenas) = 768 |

En mi propuesta no se hace necesaria la utilización de las tablas para multiplicar, solamente se necesita sumar, doblar y las nociones de unidades, decenas...

**La División:** un niño de grado 4º utilizó el siguiente algoritmo para encontrar 127÷24:

| | |
|---|---|
| 24 + 24 = 48 (dos veces)<br><u>+48 (dos veces)</u><br>96 (cuatro veces)<br><u>+ 24 (una vez)</u><br>120 (cinco veces) | El resultado de esta división es 5 y sobran 7 (lo que le hace falta a 120 para llegar a 127) |

En este procedimiento el niño no utilizó las tablas de multiplicar; al dividir dos números de una cifra cada uno, encontró la respuesta sumando con los dedos de la mano y para números de más cifras utilizó el conteo pero con ayuda del lápiz y el papel.

Para terminar presento este ejemplo que se puede aprovechar para enseñar la división entre números naturales utilizando billetes y monedas de nuestro sistema monetario y a su vez permite aclarar el lenguaje que se utiliza en el algoritmo tradicional; esto porque en la mayoría de las ocasiones, vemos como los niños manejan los términos que allí aparecen y hasta los repiten sin sentido alguno.
**Repartir** $15348 en partes iguales entre 13 personas.
**Tenemos:** 1 billete de $10 000, 5 billetes de $1000, 3 billetes de $100, 4 billetes de $10 y 8 billetes de $1.

1. Un billete de $10000 no se puede repartir entre 13 personas. Tomamos entonces las dos primeras cifras o sea 15. aquí 15 equivale a tener 15 billetes de $1000.
2. 15 billetes de $1000 entre 13, corresponde a 1 de $1000 para cada uno (esto implica que la solución es mayor de mil).
3. Sobran 2 billetes de $1000 y para seguir repartiendo hay que cambiarlos por billetes de a cien (bajamos la siguiente cifra). O sea tenemos 23 billetes de $100.
4. Corresponde luego 1 billete de $100 a cada uno y quedan 10 billetes de $100, los que no se pueden repartir entre 13.

5. Estos 10 billetes de $100 se cambian por billetes de $10, teniendo entonces así 104 billetes de a $10.
6. Corresponde luego 8 billetes de $10 a cada uno. No queda ningún billete de $10. Falta repartir solamente los billetes de a peso, pero como solo hay ocho, entonces no le corresponde a nadie ninguno de estos billetes. (0 al cociente)

Resumen de 1, 2, 3, 4, 5 y 6: 1 billete de $1000; 1 billete de $100; 8 billetes de $10 y ninguno de a peso, o sea, $1180 para cada uno y sobran $8.

**¡Nuevamente sin utilizar las tablas!**

**Es importante tener en cuenta que en un nivel más avanzado se pueden utilizar monedas para trabajar los decimales.**

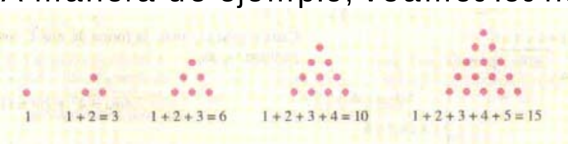
SEGUNDA PARTE

## VISUALIZACIÓN DE FÓRMULAS, CONSTRUCCIÓN DE SUCESIONES Y SUMATORIAS A PARTIR DE LOS NÚMEROS FIGURADOS

*"Más Observaciones a partir del triángulo de Pascal"*

***Por: Martha Cecilia Mosquera Urrutia***

Es muy frecuente encontrar que la mayoría de los estudiantes, aún aquellos que se desempeñan con éxito en aritmética, tienen grandes dificultades en las clases de álgebra al emprender la tarea de encontrar términos generales y llegar a su representación simbólica, en este caso particular, me refiero al uso muchas veces "abusivo" de fórmulas y generalizaciones que los niños aprenden y repiten de manera memorística, sin ningún tipo de sentido. En el afán que tenemos por llenar los programas, olvidamos que si bien es cierto que los aprendientes necesitan desarrollar la habilidad de manipular las expresiones simbólicas, es necesario que estas expresiones tengan sentido para ellos.
Como una forma de abordar y enfocar este problema, propongo que desde la edad temprana se ayude a los aprendientes a desarrollar la habilidad para visualizar patrones y estudiar las posibles estructuras, leyes y propiedades presentes en algunas representaciones o configuraciones geométricas.
A manera de ejemplo, veamos los números triangulares:




El patrón de los números triangulares resulta bastante interesante en primer lugar porque a partir de él podemos construir el Triángulo de Pascal y en segundo lugar porque a partir de los números triangulares podemos construir todos los números figurados.

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**Generalizando**:

- A través de la observación de los números figurados es posible llegar a varias conclusiones y generalizar propiedades de la sumatoria; por ejemplo que, cualquier número poligonal $F_n$ se puede expresar como una suma de números triangulares, recordando con esto a Pitágoras cuando hablaba de los procesos de triangulación. $F_n = T_n + (F-3)T_{n-1}$ Donde F es el orden del número poligonal.
- La fórmula que da el desarrollo de ***(a+b)^n*** según las potencias crecientes de a (y decrecientes de b) se llama ***binomio de Newton***. En esta expresión, lo

único que se desconoce son los coeficientes de los monomios $a^k b^{n-k}$. Los coeficientes de la forma desarrollada de $(a+b)^n$ son dados por la línea número ***n+1*** del triángulo de Pascal (la que empieza por ***1*** y ***n***) por ejemplo el número en la ***línea n*** y la ***columna k*** se nota:
$\binom{n}{k}$ *o mas bien* $C_n^k$ en esta forma se pude expresar $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ para cualquier valor de a y b. (aquí conviene hacer con los estudiantes nuevas observaciones y hacer ejercicios sustituyendo por valores numéricos para lograr mejores generalizaciones); por ejemplo, si a=x y b=1 se tiene: $(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$; de esta fórmula se pueden deducir varias, por ejemplo si se hace x=1 queda: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, ó $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0$ lo que dicho de otra manera significa que si tomamos en conjunto las cifras de cualquiera de las filas obtenemos una potencia de 11. (1, 11, 121, 1331…)

- Estas propiedades también se pueden expresar y utilizar en combinatoria, definir algunas particiones y hasta trabajar con el coeficiente trinomial.
- El famoso teorema que afirma que $\forall p \in [1, n-1],\ n/\binom{n}{p}$ en otras palabras que si n es primo, los coeficientes binomiales de la fila son divisibles por n (salvo los extremos que valen 1) resulta de muy fácil observación, interpretación y demostración.
- Otros resultados muy interesantes y que conducen a propiedades del símbolo sumatorio se obtienen cuando reemplazamos la diagonal de unos por cualquier otro dígito.
- Como proyectos de aplicación se pueden formular algunas conjeturas como por ejemplo el trabajo con los números piramidales y el trabajo con el triángulo de diferencias, en el cual reemplazamos la primera diagonal por los inversos de los números naturales y cada número en el triángulo se obtiene mediante la diferencia de los dos que están a la izquierda de él.

## CONCLUSIONES

- Los conocimientos elaborados en matemáticas por el adulto analfabeta están en íntima relación con su medio y en especial con su oficio y cultura, por ello es importante construir puentes de doble vía para que circulen por ellos los saberes entre las diferentes matrices cultures. (La popular y la científica).
- Por otro lado es importante socializar técnicas, saberes y algoritmos presentados por los niños cuando de una u otra manera aparecen en el aula a pesar de la imposición por parte de los docentes a que ellos realicen actividades de tipo conductista.
- En el caso de las representaciones geométricas, es importante tener en cuenta que si bien las figuras no constituyen en sí una prueba completa,

contienen los elementos que permiten al aprendiente hacer razonamientos de tipo general aunque solo se ilustre un caso particular.

- Al utilizar las configuraciones geométricas, resulta importante estudiar el mayor número de posibilidades, para las distintas propiedades que conforman la estructura, pues se corre el riesgo de que los aprendientes reduzcan el campo de observación y se queden únicamente con parte de las propiedades o confundan lo necesario con lo suficiente.
- Los trabajos de investigación del grupo E.MAT.H buscan inicialmente: - proponer metodologías alternativas que mantengan los beneficios de la educación matemática en el desarrollo de un pensamiento lógico riguroso y al mismo tiempo aprovechen la riqueza de los modelos matemáticos en la resolución de los problemas propios de las diferentes áreas del conocimiento y - diseñar ambientes de aprendizaje centrados en la competencia del que aprende, la evaluación y la transferencia de conceptos, buscando resignificar el conocimiento matemático, encontrando contextos[1] en los cuales los conceptos adquieren significado.

## REFRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


**ARDILA, J. A**. El Educador Matemático en LEMA volumen 2 No. 1 Revista virtual de Educación Matemática. Universidad nacional de Colombia (2003)

**FLORES P. A.** "Un Tratamiento Geométrico De La Inducción Matemática: pruebas que explican", Miscelánea Matemática 19. Arizona State University (1993)

**GRUPO AZARQUIEL.** "Ideas y Actividades Para Enseñar Álgebra" Ed. Síntesis Madrid 2002.

**MARIÑO Germán**. ¿Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular? Dimensión Educativa, Bogotá 1983.

**MEN.** ESTANDARES CURRICULARES AREA DE MATEMATICAS BOGOTÁ 2002.

**MOSQUERA URRUTIA Martha Cecilia** Modelo de Mediación Pedagógica Para el Desarrollo Del Pensamiento Matemático. TESIS DE GRADO ESPECIALIZACIÓN EN PEDAGOGIA PARA EL DESARROLLO DEL APRENDIZAJE AUTÓNOMO UNAD-CAFAM. Bogotá 2003[2].


[1] Para poder encontrar estos contextos se hace necesario en primer lugar: "**aprender a conocer**" en otras palabras desarrollar habilidades de pensamiento que permitan lograr altos niveles de conceptualización de tal forma que tanto el que aprende, como el que media entre él y el conocimiento, puedan identificar cuáles son los conocimientos previos que es necesario "tener claros" para poder acceder al aprendizaje de un tópico; en segundo lugar: "**aprender a fijar metas de aprendizaje**" que permitan emprender caminos que tengan principio y de algún modo "fin"; en tercer lugar "**aprender a evaluar**" mediante el uso de estrategias metacognitivas que posibiliten saber ¿cómo es que uno aprende? ¿Qué estrategias de aprendizaje son adecuadas para tal o cuál situación? ¿Cómo hago mi trabajo? ... Se entiende la evaluación como un proceso que debe estar presente siempre y cuyo responsable no es solamente el mediador; debe quedar claro que la responsabilidad de la evaluación es compartida por todos, y en cuarto lugar (no el último) "**aprender a pensar matemáticamente**" en otras palabras, aprender a hacer matemáticas; éste aspecto es uno de los mas difíciles debido a que si bien es cierto, que hacer matemáticas o pensar matemáticamente se ha considerado siempre como una acción intelectual de las más fecundas que puede llegar a lograr el ser humano, y que aprender a hacer matemáticas o razonar de manera lógico matemática es considerado un signo de ¡verdadera inteligencia!, (es por ello que quien hace matemáticas es mirado y admirado de manera diferente) aún persiste la idea ingenua de que esta es una actividad a la cual no es fácil acceder, esta afirmación no es del todo cierta, por ello el principal objetivo es ***mostrar a los aprendientes que ellos también pueden llegar a hacerlo***...

[2] En el "**MODELO DE MEDIACIÓN PEDAGÓGICA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO**" se propone el uso de Las "**ESTRATEGIAS DE MEDIACIÓN PEDAGÓGICA PARA EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO** que son ocho hábitos o costumbres académicas que deben desarrollar los estudiantes para "aprender a hacer matemáticas" Entrar En Contacto Con Las Personas Que Hacen Matemáticas, Aprender A Hacer Demostraciones, Contar A Otros Sobre Nuestros Descubrimientos, Aprender A Encontrar

Contextos En Los Cuales Los Conceptos Adquieren Significado O Aprender A Transferir, Aprender A Jugar, Aprender A Leer y A Escribir Con Propósito, Aprender a Utilizar Las TICs, Formar Personas Con Actitudes Positivas Hacia El Aprendizaje, la superación personal, el trabajo en equipo…