"Otras Alternativas Para La Definición De Relación En Teoría De Conjuntos"

Carlos Julio Luque Arias
Profesor Universidad Pedagógica Nacional
Grupo de Algebra. Universidad Pedagógica Nacional

Haydee Jiménez Tafur
Grupo de Algebra. Universidad Pedagógica Nacional
Estudiante de maestría en Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia.

Jaime Fonseca González
Grupo de Algebra. Universidad Pedagógica Nacional
Profesor Universidad Manuela Beltrán.

Las relaciones son ubicuas en la vida cotidiana y en matemáticas, relacionamos libros con sus autores, animales con sus dueños, personas con otras personas a través de la amistad, del compañerismo, o de muchas otras formas. En matemáticas relacionamos puntos con rectas, con otros puntos, rectas con otras rectas o con planos, números con conjuntos, con otros números, conjuntos entre sí, etc. En este trabajo precisaremos y ampliaremos la definición matemática de relación, estudiaremos algunas de sus propiedades y sus operaciones. Inicialmente mostraremos los 16 conectivos lógicos binarios, lo que nos permitirá ampliar las definiciones posteriores.

1. Los 16 conectivos lógicos

Habitualmente en matemáticas manejamos seis conectivos lógicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\underline{\vee}$; y si representamos el valor de verdad falso con 0 y el verdadero con 1, estos se pueden representar con las siguientes tablas:

$\neg$	0	1
	1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\underline{\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	0

Sin embargo existen otras posibilidades para construir tablas cuyas entradas sean 0 y 1, algunos de ellos están asociados con los conectivos lógicos, como por ejemplo la barra de Sheffer $x \mid y = \neg (x \wedge y)$ y el funtor de Peirce $x \downarrow y = \neg (x \vee y)$, cuyas tablas son:

$\mid$	0	1
0	1	1
1	1	0

$\downarrow$	0	1
0	1	0
1	0	0

También tenemos la *implicación recíproca* de $x \to y$, o sea $y \to x$ que la simbolizamos con $x \leftarrow y$, relacionada con la conjunción en la forma $x \leftarrow y = \neg((\neg x) \wedge y)$ y cuya tabla es

$\leftarrow$	0	1
0	1	0
1	1	1

La *diferencia* $x -\!\bullet\, y = x \wedge (\neg y)$ y la *diferencia recíproca* $x \bullet\!- y = (\neg x) \wedge y$, cuyas tablas son:

$-\bullet$	0	1
0	0	0
1	1	0

$\bullet-$	0	1
0	0	1
1	0	0

Pero quedan seis posibilidades que en principio no parecen tener vínculo directo con la lógica: π_1 que llamaremos *primera proyección*, $\otimes$ que corresponde a la *negación de la primera proyección*; la *segunda proyección* π_2 y su negación $*$:

π_1	0	1
0	0	0
1	1	1

$*$	0	1
0	1	0
1	1	0

$\otimes$	0	1
0	1	1
1	0	0

π_2	0	1
0	0	1
1	0	1

La operación *tautología* $\top$ y *contradicción* $\perp$:

$\top$	0	1
0	1	1
1	1	1

$\perp$	0	1
0	0	0
1	0	0

Una razón para sólo utilizar los conectivos habituales es que todos los conectivos enunciados podemos expresarlos en términos de $\neg$ y $\wedge$:

$x \vee y = \neg((\neg x) \wedge (\neg y))$
$x \to y = \neg(x \wedge (\neg y))$
$x \veebar y = (\neg((\neg x) \wedge (\neg y))) \wedge (\neg(x \wedge y))$
$x \leftrightarrow y = \neg((\neg((\neg x) \wedge (\neg y))) \wedge (\neg(x \wedge y)))$
$x \mid y = \neg(x \wedge y)$
$x \downarrow y = \neg(x \vee y)$
$x \leftarrow y = \neg((\neg x) \wedge y)$
$x -\!\bullet\, y = x \wedge (\neg y)$
$x \bullet\!- y = (\neg x) \wedge y$
$x \,\pi_1\, y = x$
$x \,\pi_2\, y = y$
$x \otimes y = \neg x$

$x * y = \neg y$
$x \top y = \neg((\neg x) \wedge x)$
$x \perp y = (\neg x) \wedge x$
La flecha o funtor de Peirce y la barra de Sheffer permiten expresar todas las demás operaciones lógicas en términos de ella, debido a que la negación se puede expresar en términos de ellas, en la forma:

$$\neg p = p \downarrow p$$

con esto, la disyunción es $p \vee q = (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ y la conjunción: $p \wedge q = (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

O en términos de la barra de Sheffer $\neg p = p \mid p$. Con esto, la conjunción es $p \wedge q = (p \mid q) \mid (p \mid q)$ y la disyunción: $p \vee q = (p \mid p) \mid (q \mid q)$. Si escribimos los conectivos en términos del funtor y la barra, las fórmulas resultantes son muy extensas y de difícil manejo.

1.2. Conjuntos y sus operaciones

Sea X un conjunto, $p(x)$ y $q(x)$ dos predicados sobre X, por el axioma de especificación[1] podemos formar los conjuntos A = $\{x \in$ X: $p(x)\}$ y B = $\{x \in$ X: $q(x)\}$. Para caracterizar a los elementos del conjunto A que satisfacen la condición $p(x)$ expresamos $x \in$ A.

Al conjunto de elementos que no cumplan la propiedad $p(x)$, es decir los elementos de X que no están en A, forman el *complemento* de A y se nota A^c: $A^c = \{ x : x \notin A \}$. Si ningún elemento de X cumple la propiedad $p(x)$, el conjunto formado lo llamamos *conjunto vacío* y lo notamos $\varnothing$.

1.2.1. Subconjuntos de un conjunto A y el conjunto de partes $\wp$(A)

Sea X un conjunto, decimos que un conjunto A de X *está contenido en* un conjunto B de X o que A *es subconjunto de* B y lo notamos A $\subseteq$ B si y sólo si $(\forall\ x \in \mathrm{X})\ (x \in \mathrm{A} \rightarrow x \in \mathrm{B})$. Al conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto A lo llamamos *el conjunto*[2] *de partes de A* y lo notamos $\wp(A)$, en símbolos $\wp(A) = \{B \subseteq X: B \subseteq A\}$.

1.2.2. Igualdad de conjuntos

Sea X un conjunto, dos subconjuntos A y B de X son iguales A = B si y solo si $(\forall x \in X)\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Para demostrar que dos conjuntos A = B son iguales debemos probar que A $\subseteq$ B y B $\subseteq$ A es decir que debemos tomar un elemento arbitrario de A y por medio de razonamientos válidos, demostrar que ese elemento se encuentra en B, y viceversa tomar un elemento cualquiera de B y probar que está en A, por ejemplo si queremos demostrar que

---

[1] HALMOS, Paul., (1971). Teoría intuitiva de conjuntos, México: C.E.C.S.A. p. 13-16.
[2] La existencia del conjunto de partes de un conjunto, esta justificado por el axioma del conjunto potencia dentro de la axiomatización de la teoría de conjuntos propuesta por E. *Zermelo* (1908).

$(A^c)^c = A$, debemos probar primero que $(A^c)^c \subseteq A$; para ello, sea $x \in (A^c)^c$ entonces $x \notin A^c$ o sea que $x \in A$ (lo que no está en el complemento de A, está en A). Y para probar que $A \subseteq (A^c)^c$ elegimos un elemento $x \in A$, fijo pero arbitrario, entonces $x \notin A^c$ y por lo tanto $x \in (A^c)^c$.

1.2.3. Operaciones entre conjuntos

Sea X un conjunto, para cualquier par de subconjuntos *A* y *B* en $\wp(X)$ podemos formar otros conjuntos combinando los elementos de *A* y de *B,* utilizando los conectivos de la lógica, por ejemplo si tomamos los elementos que estén:

1. En *A* y en *B* obtenemos la **intersección** de *A* y *B* que notamos

$$A \cap B = \{x \in X: x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

2. En *A* o en *B* obtenemos la **unión** de *A* y *B* que notamos:

$$A \cup B = \{x \in X: x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

3. En *A* entonces está en *B* obtenemos la **implicación** de *A* y *B* que notamos:

$$A \to B = \{x \in X: x \in A \ \to \ x \in B\}$$

4. En *A* si y sólo si está en *B* obtenemos la **doble implicación** de *A* y *B* que notamos:

$$A \leftrightarrow B = \{x \in X: x \in A \ \leftrightarrow \ x \in B\}$$

5. En *A* y no en *B* obtenemos la **diferencia** entre *A* y *B* que notamos:

$$A - B = \{x \in X: x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

6. En *A* o en *B* pero no en ambos, obtenemos la **diferencia simétrica** entre *A* y *B* que notamos:

$$A \,\Delta\, B = \{x \in X: x \in (A \cup B) \ \wedge \ x \notin (A \cap B)\}$$

Este último conjunto se puede expresar de otra forma:

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B),$$

es decir, que un elemento cualquiera debe estar en *A* y no en *B* o en *B* y no en *A*.

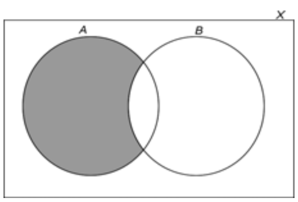
De la misma forma podemos construir nuevos conjuntos usando los 16 conectivos lógicos así

$$A \copyright B = \{x \in X: x \in A \copyright x \in B\}$$

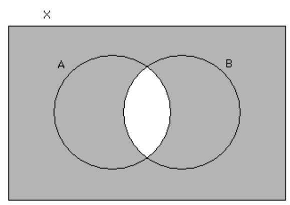
Las operaciones usuales de unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica entre los conjuntos A y B corresponden con las operaciones definidas por los conectivos los conectivos $\vee$, $\wedge$, $-\!\bullet$, y $\veebar$ respectivamente; el complemento de un conjunto A corresponde con el conjunto $A^c = \{x \in X\colon \neg\,(x \in A)\}$.

Gráficamente representamos, con los conocidos diagramas de Venn - Euler[3], al universo X como un rectángulo y dentro de él representamos los subconjuntos usuales con círculos u otras figuras geométricas, marcando las zonas correspondientes al valor de verdad 1 del conectivo correspondiente. Por ejemplo

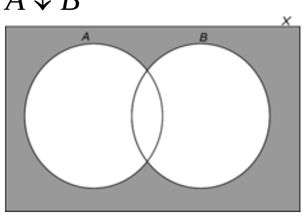
$A -\!\bullet B$



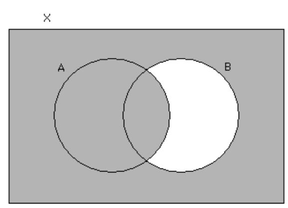
$A \mid B$



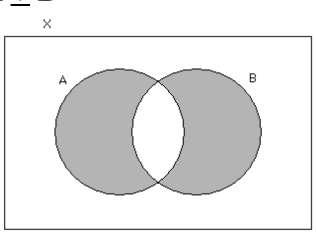
$A \downarrow B$



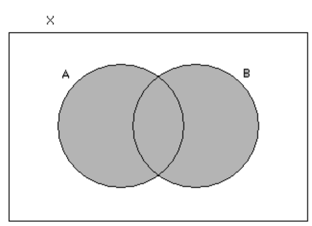
$A \leftarrow B$



$A \veebar B$



$A \vee B$



Ejemplo

Si $X = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, c, e\}$, tenemos que

$A \cup B = \{a, b, c, e\} = B \cup A$
$A \veebar B = \{b, e\} = B \veebar A$
$A \leftarrow B = \{a, b, c, d\} \neq B \leftarrow A = \{a, c, d, e\}$
$A \mid B = \{d, b, e\} = B \mid A$

[3] En honor del matemático John Venn (1834-1882), quien perfeccionó la idea Euler (1707-1783).

$A \downarrow B = \{d\} = B \downarrow A$
$A\ \pi_1\ B = \{a, c, b\} \neq B\ \pi_1\ A = \{a, c, e\}$

1.2.4. Generalización de la noción de contenencia entre conjuntos

Dados X un conjunto no vacío y A, B subconjuntos de X, decimos que *A está contenido en B según el conectivo* © o que *A es un subconjunto según el conectivo* © y lo notamos

$$A \subseteq_{©} B \text{ si y sólo si } (\forall x \in X)\ (x \in A \ © \ x \in B).$$

La contenencia usual corresponde con la contenencia según el conectivo $\rightarrow$, *y en este caso no mencionaremos el conectivo*, la igualdad de conjuntos corresponde con la contenencia según el conectivo $\leftrightarrow$. La afirmación $A \subseteq_{©} B$ es equivalente a $A \ © \ B = X$.

Con la modificación de la definición de contenencia, también se obtiene un cambio en la definición del conjunto de todos los conjuntos que están contenidos según el conectivo © en A, al cual llamaremos *conjunto de partes según el conectivo* ©, que notamos $\wp_{©}(A)$. El conjunto de partes usual corresponde con el del conectivo $\rightarrow$ y tampoco lo mencionaremos.

$$\wp_{©}(A) = \{B \subseteq X : B \subseteq_{©} A\}.$$

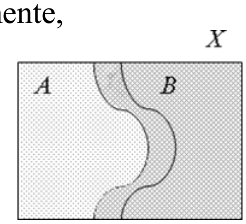
Ejemplos

1. Según el conectivo $\vee$

En un conjunto de referencia X no vacío, por definición

$$\text{A} \subseteq_{\vee} \text{B si y sólo si } (\forall\ x \in \text{X})\ (x \in \text{A} \vee\ x \in \text{B}).$$

Para que un conjunto A esté contenido en otro conjunto B según el conectivo $\vee$, todos los elementos del universo deben estar en A o en B, es decir, $A \cup B = X$, es decir que $\{A, B\}$ debe formar un *cubrimiento* de X. Gráficamente,



Si $X = \{a, b, c, d, e\}$ es el conjunto universal, luego si

$A = \{a\}$, tenemos $\wp_{\vee}(A) = \{\{b, c, d, e\}, X\}$.
$A = \{a, b\}$, tenemos $\wp_{\vee}(A) = \{\{c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, X\}$.
$A = \{a, b, c\}$, tenemos que $\wp_{\vee}(A) = \{\{d, e\}, \{d, e, a\}, \{d, e, b\}, \{d, e, c\}, \{d, e, a, b\}, \{d, e, a, c\}, \{d, e, b, c\}, X\}$.

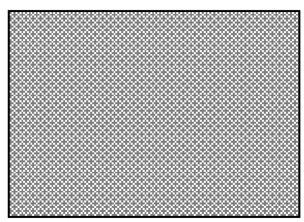
$A = \{a, b, c, d\}$, tenemos que $\wp_{\vee}(A) = \{\{e\}, \{e, a\}, \{e, b\}, \{e, c\}, \{e, d\}, \{e, a, b\}, \{e, a, c\}, \{e, a, d\}, \{e, b, c\}, \{e, b, d\}, \{e, c, d\}, \{e, a, b, c\}, \{e, a, b, d\}, \{e, a, c, d\}, \{e, b, c, d\}, X\}$.
$A = X$, tenemos $\wp_{\vee}(X) = \wp(X)$.
$A = \varnothing$, tenemos $\wp_{\vee}(\varnothing) = \{X\}$.

2. Según el conectivo $\wedge$

En un conjunto de referencia X no vacío, $(A \subset_{\wedge} B)$ si y sólo si $((\forall x \in X)\ (x \in A \wedge x \in B))$. Para que $A \subset_{\wedge} B$ todo elemento de A debe ser también elemento de B y todo elemento de B debe ser también elemento de A, luego $A = B$ (con la definición de igualdad usual), además, en A tienen que estar todos los elementos del universo, de manera que para todo subconjunto propio A de X tenemos que $\wp_{\wedge}(A) = \varnothing$, $\wp_{\wedge}(\varnothing) = \varnothing$ y $\wp_{\wedge}(X) = \{X\}$.

La representación en diagramas de Venn para la contenencia según el conectivo $\wedge$ entre los conjuntos A y B es

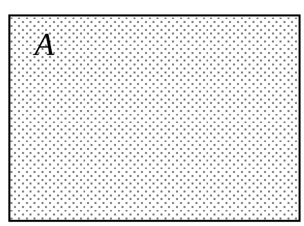
$X = A = B$



3. Según el conectivo $-\!\bullet$

En un conjunto de referencia X no vacío, si A, B son subconjuntos de X $(A \subset_{-\bullet} B)$ si y sólo si $((\forall x \in X)\ (x \in A -\!\bullet\ x \in B))$. Un conjunto A está contenido en B según el conectivo $-\!\bullet$, cuando $A -\!\bullet B = X$, lo que sucede cuando todo elemento de X está en A pero no en B, es decir cuando $A = X$ y $B = \varnothing$. Gráficamente tenemos:

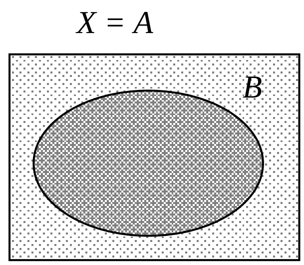
X



De manera que para todo subconjunto propio A de X y diferente de vacío, tenemos que $\wp_{-\bullet}(A) = \varnothing$, $\wp_{-\bullet}(X) = \varnothing$ y $\wp_{-\bullet}(\varnothing) = \{X\}$.

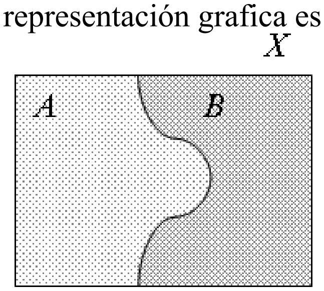
4. Según el conectivo π_1

En un conjunto de referencia X no vacío, si A, B son subconjuntos de X. $(A \subset_{\pi 1} B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A \ \pi_1 \ x \in B))$. Notemos que $A \subset_{\pi 1} B$ cuando $A = X$ y $B \subseteq A$. Esto lo podemos representar gráficamente como



5. Según el conectivo $\underline{\vee}$

En un conjunto de referencia X, si A, B son subconjuntos de X, $(A \subset_{\underline{\vee}} B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A \ \underline{\vee} \ x \in B))$. $A \subset_{\underline{\vee}} B$ cuando $A \cup B = X$ y $A \cap B = \varnothing$ o sea que {A, B} forma un *cubrimiento disyunto*[4] de X, una representación grafica es:



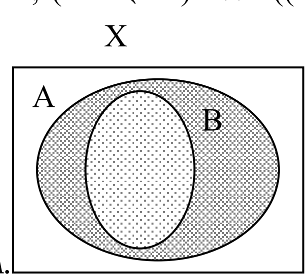
Si X = $\{a, b, c, d, e\}$ y

i. A = $\{a, b\}$, B = $\{c, d, e\}$. Como A $\underline{\vee}$ B = $\{a, b, c, d, e\}$ = X entonces A $\subseteq_{\underline{\vee}}$ B, también tenemos que A $\vee$ B = X, luego A $\subseteq_{\vee}$ B.

ii. A = $\{a, b, c\}$, B = $\{a, c, d, e\}$. Como A $\vee$ B = X entonces A $\subseteq_{\vee}$ B, sin embargo tenemos que A $\underline{\vee}$ B = $\{b, d, e\} \neq$ X, luego A $\not\subseteq_{\underline{\vee}}$ B.

6. Según el conectivo $\leftarrow$

Si A, B son subconjuntos de un conjunto X, $(A \subset_{\leftarrow} B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)(x \in A \leftarrow x \in B))$.



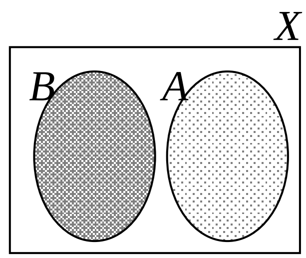
$A \subset_{\leftarrow} B$ cuando $B - A = \varnothing$, es decir $B \subseteq A$.

[4] Si A y B son ambos distintos de vacío, {A, B} es una *partición* de X.

Si $X = \{a, b, c, d, e\}$ y $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, c\}$. Como $A \leftarrow B = \{a, b, c, d, e\} = X$ entonces $A \subseteq_{\leftarrow} B$.

7. Según el conectivo $|$

Si A, B son subconjuntos de un conjunto X, $(A \subset_{|} B) \leftrightarrow ((\forall x \in X)\,(x \in A \,|\, x \in B))$. O sea que $A \subset_{|} B$ cuando son disjuntos, es decir $A \cap B = \varnothing$. Su representación grafica es:



1.3. Producto cartesiano

Sea X un conjunto y A un subconjunto de 2 elementos de X, digamos $A = \{a, c\}$, si deseamos ordenar estos dos elementos de manera que el primero sea c y el segundo sea a, esto podemos hacerlo[5] formando los conjuntos de los elementos que anteceden o son iguales en el orden deseado a cada elemento, en la forma $\{c\}$ y $\{a, c\}$. Y los reunimos en un conjunto $\{\{c\}, \{a, c\}\}$, para decir que a c no le antecede algún elemento y a a le antecede c.

Si $X = \{a, b, c, d\}$ y queremos expresar el orden c, d, a, b lo hacemos con el conjunto

$$\{\{c\}, \{d, c\}, \{a, d, c\}, \{c, d, a, b\}\}$$

Un detalle importante es que si damos el conjunto $\{\{c\}, \{d, c\}, \{a, d, c\}, \{c, d, a, b\}\}$, podemos recuperar el orden establecido. Por supuesto que pudimos elegir a los elementos que siguen en lugar de los que anteceden, pero la idea es la misma.

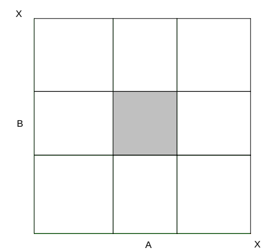
Esta idea es la utilizada en teoría de conjuntos para construir lo que llamamos una pareja ordenada. Dados dos elementos a y b de un conjunto X, definimos la *pareja ordenada* (a, b) como: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Como $\{a\}, \{a, b\} \in \wp(X)$ entonces $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \wp(\wp(X))$.

Si a, b, c y d son elementos de X, de la definición obtenemos que $(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$. (a, b) no es igual a la pareja (b, a), a menos de que $a = b$.

Ahora definimos el conjunto $X \times X$ como $X \times X = \{(a, b): a, b \in X\}$, llamado el *producto cartesiano* $X \times X$. Notemos que $X \times X$ no es un subconjunto de X, pero sí del conjunto $\wp(\wp(X))$, esta contenencia justifica su existencia dentro de la teoría de conjuntos.

[5] HALMOS, P., Op. cit. p. 35-39.

Dados dos subconjuntos cualesquiera A, B de X, definimos el *producto cartesiano usual* de A con B, notado $A \times B$, como $A \times B = \{\{(a, b): a \in A \wedge b \in B\}\}$. La representación gráfica habitual de este producto es:



El producto cartesiano $A \times B$ en general es distinto del producto cartesiano $B \times A$.

1.3.1. Las propiedades del producto cartesiano

Para el producto cartesiano usual $A \times B$ (a partir del conector lógico $\wedge$), se cumplen algunas propiedades como:

a. $A \times B = \varnothing \leftrightarrow (A = \varnothing \vee B = \varnothing)$
b. $A \subseteq B \rightarrow A \times C \subseteq B \times C$
c. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
d. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
e. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
f. $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
g. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$
h. En general $(A \cup B) \times (C \cup D) \neq (A \times C) \cup (B \times D)$

Demostremos el numeral f.
Prueba: Sea $(x, y) \in A \times (B - C)$ esto significa que $(x \in A) \wedge (y \in (B - C)$ o sea que $(x \in A) \wedge ((y \in B) \wedge (y \notin C))$ lo que equivale a $((x \in A) \wedge (y \in B)) \wedge ((x \in A) \wedge (y \notin C))$ y esto dice que $(x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin A \times C$ y por lo tanto $(x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$. La recíproca se demuestra de manera similar.

1.3.2. Generalización de la noción de producto cartesiano entre conjuntos

La definición de producto cartesiano la podemos modificar cambiando el conectivo $\wedge$ por los otros 15, de manera general podemos definir el *producto cartesiano de A con B, según el conectivo* ©, como $A \times_{©} B = \{\{(a, b): a \in A © b \in B\}\}$.

Ejemplos

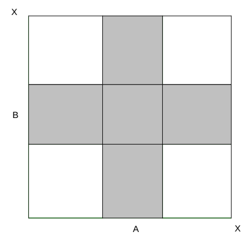
1. Producto cartesiano según la disyunción $A \times_{\vee} B = \{\{(a, b): a \in A \vee b \in B\}\}$. Sea $X = \{a, b, c, 1, 2, 3\}$ el conjunto de referencia y $A = \{a\}$ y $B = \{1, 2\}$, el producto

$A \times_{\vee} B = \{(a, 1), (a, 2), (a, a), (a, b), (a, c), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (c, 1),$

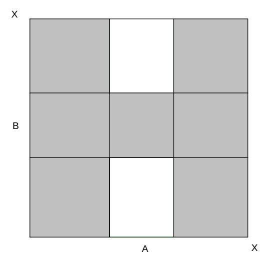
$(c, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$

Está formado por todas las parejas ordenadas (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$, es decir $(a, 1)$ y $(a, 2)$; con $a \in A$ y $b \notin B$, es decir (a, a), (a, b), (a, c) y $(a, 3)$; y con $a \notin A$ y $b \in B$, es decir $(b,1)$, $(b, 2)$, $(c, 1)$, $(c, 2)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ y $(3, 2)$.

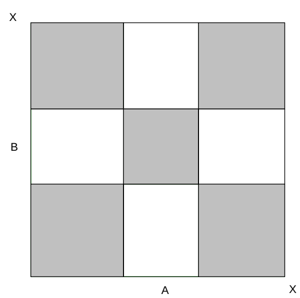
Gráficamente podemos representar el producto cartesiano $A \times_{\vee} B$ por (zona sombreada):



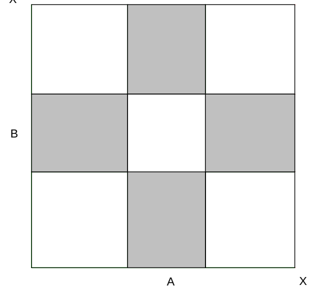
2. Producto cartesiano según la implicación $A \times_{\rightarrow} B = \{\{(a, b): a \in A \rightarrow b \in B\}\}$, cuya representación gráfica es



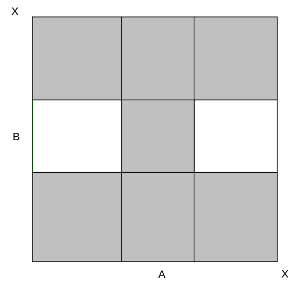
3. Producto cartesiano según la equivalencia o doble implicación $A \times_{\leftrightarrow} B = \{\{(a, b): a \in A \leftrightarrow b \in B\}\}$, cuya representación gráfica es



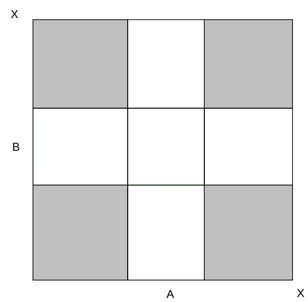
4. El producto cartesiano según la disyunción exclusiva $A \times_{\underline{\vee}} B = \{\{(a, b): a \in A \underline{\vee} b \in B\}\}$, tiene como representación gráfica



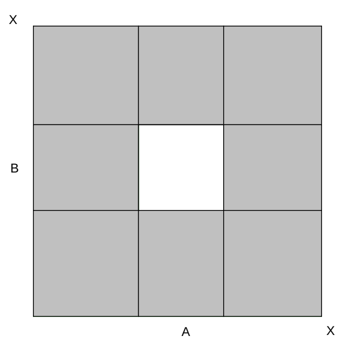
5. Producto cartesiano según la implicación recíproca $A \times_{\leftarrow} B = \{\{(a, b): a \in A \leftarrow b \in B\}\}$, cuya representación gráfica es



6. Producto cartesiano según el funtor de Peirce $A \times_{\downarrow} B = \{\{(a, b): a \in A \downarrow b \in B\}\}$, cuya representación gráfica es



7. Producto cartesiano según la barra de Sheffer $A \times_{|} B = \{\{(a, b): a \in A \mid b \in B\}\}$, cuya representación gráfica es



El producto cartesiano usual entre dos conjuntos A y B está contenido de manera usual en los productos según los conectivos $\vee$, $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\leftrightarrow$, entre otros, pero no en los productos cartesianos según los conectivos $\underline{\vee}$, $\downarrow$, $|$. Lo que significa que en los últimos productos todas las parejas no tienen como primera componente un elemento de A ni como segunda componente un elemento de B.

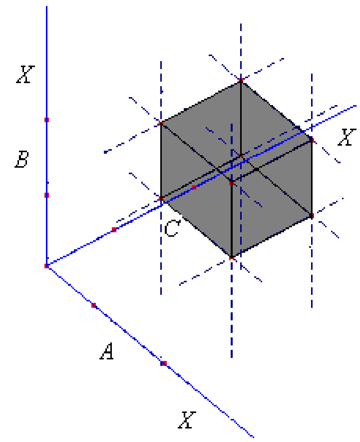
1.3.3. Productos cartesianos con tres, con cuatro o con *n* conjuntos

Una posibilidad para definir una tripla ordenada es $(a, b, c) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$. De igual forma definamos el *producto cartesiano usual*[6] $A \times B \times C$ como

[6] A partir del conector lógico $\wedge$

$$A \times B \times C = \{(a, b, c): a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

Y que gráficamente podemos representar como:



El producto cartesiano definido anteriormente no es el único producto cartesiano que podemos formar, si cambiamos el conectivo lógico $\wedge$ por otro cualquiera de los 15 conectivos binarios, de manera general tenemos $A \times_{©1} B \times_{©2} C = \{(a, b, c): (a \in A ©_1 b \in B) ©_2 c \in C\}$. Pero también podemos definirlo como $A \times_{©1} B \times_{©2} C = \{(a, b, c): a \in A ©_1 (b \in B ©_2 c \in C)\}$. Estas dos definiciones no coinciden en todos los casos, en particular si los conectivos $©_1$ y $©_2$ son iguales y no es asociativo.

La noción de pareja ordenada se puede extender a cualquier número de conjuntos[7] $A_1, A_2, \ldots, A_n$, para obtener triplas, cuádruplas y en general n – uplas ordenadas y con ésta, podemos definir un producto cartesiano así: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n): a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}$. Al igual que en los casos anteriores podemos reemplazar el conectivo $\wedge$ por otros conectivos y obtener varias definiciones, dependiendo del modo de asociarlos.

1.4. Relaciones

Para establecer una relación debemos dar criterios de tal manera que dados dos elementos, uno en un conjunto A y el otro en un conjunto B (que puede ser el mismo), el criterio permite decir si uno de ellos está relacionado con el otro. Al conjunto de parejas ordenadas que cumplen el criterio se le llama una *relación de A en B*.

De manera formal, dados A y B subconjuntos de X, diremos que una *relación R* de un conjunto A en un conjunto B, es un subconjunto de $A \times B$, esto es, un elemento del conjunto de partes $\wp(A \times B)$; la colección de todas las relaciones de A en B es precisamente $\wp(A \times B)$. Dicho de otra forma, si S es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$ de dos conjuntos A y B, decimos que S es una *relación de A en B*. Cuando $A = B$, decimos que S es una *relación en A*.

[7] MUÑOZ, José., (2002) Introducción a la teoría de conjuntos. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. p. 71.

De acuerdo con la definición de relación hay tres informaciones que la determinan: el conjunto fuente, el conjunto meta y el conjunto de parejas ordenadas, podemos tener dos conjuntos de parejas iguales en relaciones diferentes, por ejemplo $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$, define relaciones diferentes si los símbolos 0, 1, 2, y 3 representan números naturales o enteros, o racionales o reales o elementos de Z_5.

Por el hecho de ser conjuntos, las relaciones también cumplen el axioma de especificación, esto es que en X×X como universo cada predicado con dos variables libres x e y, que notamos $P(x, y)$ determina una relación, si $x \in A$ e $y \in B$, el predicado P genera el conjunto de parejas ordenadas $R = \{(x, y) \in A \times B: P(x, y)\}$; y cada relación de A en B puede ser descrita con un predicado en dos variables sobre A × B.

1.4.1 Dominio y rango de una relación

Si S es una relación de A en B, A se llama la *fuente* y B la *meta*; el *dominio* de S, notado, $D(S)$, lo definimos por $D(S) = \{x \in A: (\exists y \in B)\ ((x, y) \in S)\}$; de forma similar, el *rango* o *recorrido* de S, notado $R(S)$, lo definimos por $R(S) = \{y \in B: (\exists x \in A)\ ((x, y) \in S)\}$. Si $(x, y) \in S$, decimos que x esta relacionado con y mediante S, y algunas veces lo notamos por $x\, S\, y$.

1.4.2 El grafo de una relación

El *grafo* de una relación R entre A y B es el conjunto de las parejas ordenadas de la relación. Algunas relaciones usuales en teoría de conjuntos como la relación *ser igual*, o *ser elemento de* presentan la dificultad de que no podemos precisar el conjunto fuente y el conjunto meta, como estas relaciones tienen sentido para todos los conjuntos, el conjunto fuente y el conjunto meta debería ser un conjunto de todos los conjuntos y como ya sabemos tal conjunto no existe[8].

La manera habitual de resolver este problema es restringirnos a un conjunto universal X que incluya los objetos de nuestro interés y definir la igualdad y la contenencia para los subconjuntos de él, y para la pertenencia elegir como conjunto fuente a X y como meta a $\wp(X)$. Generalmente el conjunto universal está implícito. Otra forma es usar una teoría donde no exista el problema como la teoría de clases de Neumann- Bernays- Gödel o la teoría de conjuntos de Morse–Kelley, donde los conjuntos meta y fuente se identifican con clases propias.

1.4.3 La relación recíproca[9] de una relación

Si S es una relación de A en B, la relación de B en A, formada por las parejas ordenadas (y, x), con $(x, y) \in S$ la llamamos *relación recíproca* de S y la notamos $S^{!}$, en símbolos $S^{!} = \{(y, x): (x, y) \in S\}$. El número de relaciones binarias de un conjunto A con n elementos en un conjunto B con m elementos es el número de subconjuntos del producto cartesiano A×B o sea $2^{n\times m}$, en particular el número de relaciones binarias en un conjunto con n elementos es 2^{n^2}.

[8] HALMOS, P. Op. cit. p.16.

[9] Aunque el uso de la palabra *inversa* para esta relación es frecuente, nos parece inapropiada, puesto que en general S^{-1} no es inversa de S en el sentido algebraico que al operar las dos (habitualmente se considera como operación la composición de relaciones) nos de cómo resultado una relación idéntica.

1.4.4. Representación tabular de una relación

Sea X un conjunto, A y B subconjuntos de X, una relación R de A en un conjunto B la podemos representar[10] con una tabla de manera similar a como se representan las operaciones en un conjunto P. En la primera columna colocamos a los elementos de A y en la primera fila los elementos de B. Si $(a, b) \in R$ escribimos 1 en la fila correspondiente al elemento a de A y la columna correspondiente al elemento b de B, si $(a, b) \notin R$ escribimos 0. Por ejemplo si $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ y R de A en B es $R = \{(1, 0), (0, 0), (2, 1), (3, 2)\}$, la representamos

R	0	1	2
0	1	0	0
1	1	0	0
2	0	1	0
3	0	0	1

1.4.5. Generalización de la noción de relación

La definición de relación está basada en la definición de contenencia y en la definición de producto cartesiano; pero como hemos modificado ambas definiciones, dependiendo de los conectivos lógicos, podemos generalizar también la definición de *relación según los conectivos lógicos* $©_1$ *y* $©_2$. Dados A y B subconjuntos de X, una *relación* $T_{©1,\ ©2}$ *según los conectivos lógicos* $©_1$ *y* $©_2$, de A en B es un subconjunto según el conectivo $©_1$ del producto cartesiano $A\times_{©2} B$ según el conectivo $©_2$. O sea, $T_{(©1,\ ©2)} \subseteq_{©1} A\times_{©2} B$; o más específicamente

$$(\forall(x, y) \in X\times X)\ ((x, y) \in T_{(©1,\ ©2)}\ ©_1\ (x, y) \in A\times_{©2} B).$$

Ejemplos

I. Con la contenencia habitual (con el conectivo $\rightarrow$) y el producto cartesiano habitual (con el conectivo $\wedge$)

1. En cualquier conjunto X, la *relación vacía* $\varnothing$ como subconjunto de $X\times X$.

2. En cualquier conjunto X, la *relación idéntica* o *diagonal* de X notada $\Delta_X = \{(x, x) \in X\times X: x \in X\}$.

3. En el conjunto de los números naturales N definimos la relación

$$R = \{(a, b) \in N\times N: (\exists c \in N)(a + c = b)\}$$

[10] Esta representación resulta conveniente cuando se trata de computarizar algunos procedimientos entre relaciones. Es la representación usada en el programa Finite Math 2.0.

entonces $R^{!} = \{(b, a) \in N \times N: (a, b) \in R\} = \{(b, a) \in N \times N: (\exists c \in N)\ (a + c = b)\}$.

4. En N definimos la relación $P = \{(a, b) \in N \times N: (a + c = 5)\}$, cuyo grafo es

$$\{(0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (1, 4), (5, 0)\}.$$

Notemos que aunque en N, para todo x, y se cumple que $x + y = y + x$, las parejas ordenadas, por ejemplo, (0, 5) y (5, 0) no son iguales, pero si se tiene la igualdad de relaciones $P = P^{!}$.

5. En los números enteros Z, las siguientes son relaciones:

$R_1 = \{(0, 0)\}$.
$R_2 = \{(x, y) \in Z \times Z: x^2 + y^2 = 25\}$.
$R_3 = \{(x, y) \in Z \times Z: |x| + |y| \leq 20\}$.

6. Del conjunto D_{12} de los divisores naturales de 12 en el conjunto R de los números reales, definimos la relación $S = \{(x, y) \in D_{12} \times R: x^2 + y^2 + 2x = 4y - 6\}$.

II. Con la contenencia habitual (según el conectivo $\rightarrow$) y el producto cartesiano según el conectivo $\vee$)

1. En cualquier conjunto X y cualquier subconjunto A, la *relación vacía* $\varnothing$ como subconjunto de $A \times_{\vee} A$.

2. En cualquier conjunto X y cualquier subconjunto A, la *relación idéntica* o *diagonal* de A notada Δ_A.

3. Sea el conjunto universo X = {0, 1, 2, 3}, y los conjuntos A = {0, 1} y B = {2}, entonces

$$A \times_{\vee} B = \{(0, 2), (1, 2), (0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2)\}$$

Una *relación* $R_{\rightarrow,\vee}$ *según los conectivos* $\rightarrow,\vee$ es un subconjunto usual de $A \times_{\vee} B$. Algunas relaciones son:

$R_1 = \{(0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2)\}$
$R_2 = \{(1, 2), (0, 0), (0, 1), (0, 3)\}$
$R_3 = \{(0, 2), (1,2)\}$
$R_4 = \{(0, 0)\}$

La relación recíproca de una relación S en $A \times_{\vee} B$ es la relación

$$S^{!} = \{(y, x) \in B \times_{\vee} A : (x, y) \in S\}$$

Por ejemplo

$$R_2^{!} = \{(2, 1), (0, 0), (1, 0), (3, 0)\}.$$

III. Con la contenencia habitual (según el conectivo $\rightarrow$) y el producto cartesiano según el conectivo $\leftrightarrow$)

1. En cualquier conjunto X y cualquier subconjunto A, la *relación vacía* $\varnothing$ como subconjunto de $A\times_{\leftrightarrow}A$.

2. En cualquier conjunto X y cualquier subconjunto A, la *relación idéntica* o *diagonal* de A notada Δ_A.

3. Una relación binaria R es: $R \subset A \times_{\leftrightarrow} B$ como $p \leftrightarrow q = (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$, entonces el estudio de $R \subset A \times_{\leftrightarrow} B$ se reduce al estudio de las relaciones en $(A \times B) \cup (A^c \times B^c)$, aunque el número de relaciones posibles aumenta, y también la manera en que pueden disponerse las componentes de las parejas ordenadas.

IV. Con la contenencia según el conectivo $\vee$) y el producto cartesiano usual (con el conectivo $\wedge$)

Por definición $A \subseteq_{\vee} B$ si y sólo si $(\forall\ x\in X)\ (x\in A \vee x\in B)$. Una *relación* $R_{\vee,\wedge}$ *según los conectivos* $\vee$ e $\wedge$ de A en B es un *subconjunto según el conectivo* $\vee$ del producto cartesiano usual $A \times B$, $R \subset_{\vee} A \times B$. Si $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $A = \{0, 1\}$ y $B = \{2\}$, el producto cartesiano usual $A \times B$, es: $A \times B = \{(0, 2), (1, 2)\}$. Una *relación* $R_{\vee,\wedge}$ está dada por

$$X \times X = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

y

$$\wp_{\vee}(A \times B) = \{R_1, R_2, R_3, R_4)$$

Donde $R_1 = X \times X$

$R_2 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$R_3 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

$R_4 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

En lo que sigue nos restringiremos a las relaciones usuales.

1.5. Operaciones sobre relaciones binarias

Sea X un conjunto, A y B subconjuntos de X.

1.5.1. Operaciones unarias

En estas operaciones debemos a cada relación R de A en B asignar una relación S de A en B;

1.1. Una primera opción es a cada relación R de A en B asignarle la relación complemento R^c de A en B definida por $R^c = \{(a, b) \in A\times B: \neg ((a, b) \in R)\}$. O sea que la operación unaria está definida por la función:

$$\begin{array}{c} (\ )^c\colon \wp(A\times B) \to \wp(A\times B) \\ R \quad\mapsto\quad R^c \end{array}$$

1.2. Si permitimos cambiar el conjunto meta, una opción natural es

$$\begin{array}{c} (\ )^! : \wp(A\times B) \to \wp(B\times A) \\ R \quad\mapsto\quad R^! \end{array}$$

donde $R^!$ es la relación recíproca de R.

El vínculo entre la relación recíproca de una relación R y su relación complemento está dada por $(R^!)^c = (R^c)^!$. Puesto que la pareja $(x, y) \in (R^!)^c$ si y sólo si $(x, y) \notin R^!$ si y sólo si $(y, x) \notin R$ si y sólo si $(y, x) \in R^c$ si y sólo si $(x, y) \in (R^c)^!$.

1.3. Otra manera de asignar a una relación R de A en B otra relación cambiando la meta es con la *restricción* $R|_{E\times F}$ de la relación R a un subconjunto E×F de A×B

$$\begin{array}{l} | : \wp(A\times B) \to \wp(E\times F) \\ \quad R \quad\mapsto\quad R|_{E\times F} = \{(x, y) \in E\times F: (x, y) \in R\}. \end{array}$$

1.5.2. Operaciones binarias

1.5.2.1. Operaciones conjuntistas

Como el conjunto $\wp(A\times B)$ de todas las relaciones de A en B es en particular un conjunto, podemos definir entre sus subconjuntos, es decir entre cada par R y S de relaciones de A en B, las operaciones básicas entre conjuntos según cada conectivo binario:

$$R \circledcirc S = \{(x, y) \in A\times B: ((x, y) \in R \circledcirc (x, y) \in S)\}$$

En particular la unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica, etc., son relaciones de A en B. La operación complemento tiene las propiedades habituales como:

1. $(R \cup S)^c = R^c \cap S^c$
2. $(R \cap S)^c = R^c \cup S^c$
3. Si $R \subseteq S$, then $S^c \subseteq R^c$
4. $R^{cc} = R$.

1.5.2.2. Composición de relaciones

La operación más conocida entre relaciones en un conjunto A es la *composición*, es uno de los más usados mecanismos de construcción de relaciones. Sea X un conjunto, A, B, C subconjuntos de X, R_1 una relación de A en B y R_2 una relación de B en C, la composición

$$R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \in A\times C: (\exists y \in B)\ ((x, y) \in R_1 \wedge (y, z) \in R_2)\}$$

Notemos que en la notación para la composición de las relaciones R_1 y R_2 las escribimos en el orden contrario[11] $R_2 \circ R_1$.

Ejemplos

Sea X = $\{1, 2, 3, a, b, c, d, x, y, z\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ y $C = \{x, y, z\}$, R_1 la relación de A en B, $R_1 = \{(1,c),(1,d),(2,a),(3,b),(3,c)\}$ y R_2 la relación de B en C $R_2 = \{(a, z),(b, y),(b, z),(d, x)\}$; entonces para realizar la composición $R_2 \circ R_1$ por cada pareja (p, q) de R_1 buscamos una pareja en R_2 cuya primera componente sea q, por ejemplo (q, s) entonces la pareja (p, s) está en la relación compuesta; en nuestro caso para la pareja $(1,c)$ en R_1 no existe una pareja en R_2 cuya primera componente sea c, entonces la ignoramos; para la pareja $(1,d)$ en R_1 si existe la pareja (d, x) en R_2, y por lo tanto la pareja $(1, x)$ está en la compuesta, y así encontramos que $R_2 \circ R_1 = \{(1, x),(2, z),(3, y),(3, z)\}$.

1.5.2.2.1. Propiedades de la composición de relaciones

1. La composición de relaciones es asociativa.

2. La relación recíproca de $(S \circ R)$ es $(S \circ R)^! = R^! \circ S^!$.

3. El conjunto de las relaciones binarias en un conjunto X con la composición de relaciones es un monoide (semigrupo con elemento idéntico, la relación diagonal en X).

1.5.2.3. Otras composiciones cambiando conectivos

Como en la definición de composición de relaciones aparece un conectivo lógico, podemos sustituirlo por otro cualquiera © para obtener otras formas de composición de relaciones, dejamos al lector interesado la exploración de algunas de estas posibilidades: sea X un conjunto, A, B, C subconjuntos de X, R_1 una relación de A en B y R_2 una relación de B en C, la composición $R_2 \circ_{©} R_1 = \{(x, z) \in A\times C: (\exists y \in B)\ ((x, y) \in R_1$ © $(y, z) \in R_2)\}$. Notemos que usamos relaciones usuales, que también pueden cambiarse por relaciones según los conectivos $©_1$ y $©_2$.

1.6. Propiedades de las relaciones

[11] Esta notación se elige de forma que cuando las relaciones sean funciones, la composición sea $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

De la misma forma que estudiamos en los cursos usuales de matemáticas propiedades para las operaciones como asociativa, conmutativa etc., las relaciones[12] también cumplen algunas propiedades estudiadas habitualmente como la reflexiva, simétrica, transitiva, antisimétrica, etc., que relacionan uno, dos o tres elementos y que forman relaciones de orden, de equivalencia, funciones, etc. Las propiedades de las relaciones por su estructura lógica nos permiten ampliar este estudio en varias direcciones.

1.6.1. Comparando un elemento consigo mismo

Iniciamos estudiando propiedades de relaciones definidas en un conjunto.

I. Relaciones en un conjunto A

Sea X un conjunto y A un subconjunto de X y R una relación en A.

1. Comparando un elemento consigo mismo

1.1. La propiedad más conocida es la *propiedad reflexiva*: $(\forall a \in A)\ ((a, a) \in \mathrm{R})$.

De la propiedad reflexiva surgen tres variaciones lógicas naturales:

1.2. *Propiedad irreflexiva o arreflexiva*: negando el predicado $(\forall a \in A)\ (\neg((a, a) \in \mathrm{R}))$.

1.3. *Propiedad no Irreflexiva*: cambiando el cuantificador $(\exists a \in A)\ ((a, a) \in \mathrm{R})$.

1.4. *Propiedad no Reflexiva*: cambiando el cuantificador y negando el predicado $(\exists a \in A)\ (\neg((a, a) \in \mathrm{R}))$.

Pero si vemos la propiedad reflexiva como $(\forall a \in \mathrm{X})\ (a \in A \to (a, a) \in \mathrm{R})$, invirtiendo el orden de las proposiciones obtenemos

1.5 Propiedad correflexiva: $(\forall a, b \in A)\ ((a, b) \in R \to a = b)$ y otras 15 maneras cambiando el conectivo implica por otro conectivo © cualquiera.

Ejemplos

1. En el conjunto vacío la única relación que se puede definir es *la relación vacía* y ella es reflexiva, irreflexiva y correflexiva.
2. En un conjunto unitario $A = \{0\}$ hay dos relaciones: la relación vacía y $R = \{(0, 0)\}$, la primera es irreflexiva y correflexiva y la segunda es reflexiva, correflexiva y no irreflexiva.

---

[12] RUSSELL B., *Introducción a la Filosofía Matemática.* Paidos, 1988.

3. En un conjunto con dos elementos $A = \{0, 1\}$ las relaciones irreflexivas y no reflexivas son: $R_0 = \emptyset$, $R_1 = \{(1, 0)\}$, $R_2 = \{(0, 1)\}$, $R_3 = \{(1, 0), (0, 1)\}$. De ellas sólo R_0 es correflexiva.
4. En un conjunto con tres elementos $A = \{a, b, c\}$ podemos formar $2^9 = 512$ relaciones: la relación vacía, 9 relaciones con un elemento, 36 relaciones con dos elementos, las cuales no son reflexivas. De las 84 relaciones con tres elementos, la única reflexiva es la relación idéntica. La relación $S = \{(a, a), (b, b)\}$ es correflexiva pero no reflexiva.
5. La *relación idéntica* en un conjunto A, también conocida como la *diagonal* de A: $\Delta_A = \{(x, x): x \in A\}$, es reflexiva, además es la más pequeña relación reflexiva en A, esto es que toda relación que sea reflexiva debe contener a la relación idéntica, además es correflexiva. En realidad una relación es correflexiva en A si es un subconjunto de Δ_A.
6. La relación R en el conjunto de los números naturales N definida por $R = \{(a, b): \exists k \in N, a + b = 2k\}$, es reflexiva, pero no correflexiva puesto que $(1, 3) \in R$ y $1 \neq 3$.
7. En el plano euclidiano las relaciones de congruencia y semejanza de triángulos son reflexivas.
8. En un conjunto con tres elementos, se encuentran 64 relaciones irreflexivas, mientras que en un conjunto con cuatro elementos hay 4096 relaciones irreflexivas. El número de relaciones reflexivas sobre un conjunto con n elementos es el mismo número de relaciones irreflexivas y es $2^{2T_{n-1}}$, donde T_{n-1} es el $(n-1)$-ésimo número triangular.

Este último resultado se justifica usando la representación tabular de las relaciones, una relación es reflexiva si y sólo si la diagonal está formada sólo por 1 y es irreflexiva si y sólo si la diagonal está formada sólo por 0, las demás posiciones en una tabla con n filas y n columnas son $(1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1)) = T_{n-1}$ encima de la diagonal principal y el mismo número debajo de ella, o sea $2T_{n-1}$ y como cada posición puede ser llenada con 0 o con 1, hay en total $2^{2T_{n-1}}$ relaciones reflexivas y el mismo número de relaciones irreflexivas. Algunos resultados generales sobre estas relaciones son:

Teorema 1.6.1: Si una relación no vacía es reflexiva entonces es no irreflexiva.

Prueba: Si una relación R sobre un conjunto A es reflexiva entonces $(\forall\, a \in A)\, ((a, a) \in R)$ y como es no vacía $(\exists\, a \in A)\, ((a, a) \in R)$, por lo tanto es no irreflexiva.

Teorema 1.6.2: Si una relación no vacía es irreflexiva entonces es no reflexiva.

Teorema 1.6.3: Una relación R es irreflexiva sobre A si y solo si la relación recíproca $R^!$ es irreflexiva sobre A.

Prueba: Sea A un conjunto, R una relación irreflexiva en A y un elemento arbitrario $x \in A$. R es irreflexiva si y sólo si para todo $x \in A$ se cumple que $(x, x) \notin R$ y como $R^! = \{(y, x): (x, x) \in R\}$, entonces $(x, x) \notin R^!$.

Teorema 1.6.4: Una relación R es reflexiva en A si y solo si su relación recíproca $R^!$ es reflexiva en A.

Teorema 1.6.5: El complemento de una relación reflexiva es irreflexiva y viceversa.
Prueba: Sea A un conjunto, R una relación reflexiva en A, para cada $x \in A$, se cumple que $(x, x) \in$ R y como $R^c = \{(a, b) \in A\times B: \neg (a, b) \in R)\}$ entonces para todo $x \in A$, se cumple que $\neg ((x, x) \in R^c)$, por lo tanto R^c es irreflexiva.

Teorema 1.6.6: La composición de dos relaciones reflexiva es reflexiva.

Prueba: Sean R_1 y R_2 dos relaciones reflexivas sobre un conjunto A. Para cada $x \in A$, se cumple que $(x, x) \in R_1$ y $(x, x) \in R_2$. Por la definición de la composición de relaciones $(x, x) \in R_1 \circ R_2$, (también $(x, x) \in R_2 \circ R_1$) lo que significa que $R_1 \circ R_2$ (y también también $R_2 \circ R_1$) es reflexiva.

2. Comparando dos elementos

La manera más popular de comparar dos elementos es la usada en la propiedad simétrica. Sea X un conjunto, A un subconjunto de X; una relación R definida en A

2.1. *Propiedad simétrica:*

Una relación R definida en A es *simétrica*, si para todo $x, y \in A$ se tiene que $(x, y) \in R$ implica $(y, x) \in R$. En símbolos $(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$. Como hay un cuantificador y un conectivo lógico uniendo dos predicados podemos obtener algunas variaciones lógicas[13] de esta propiedad como $(\forall a, b \in A)$ $((a, b) \in R$ © $(b, a) \in R)$. O cambiando el cuantificador $(\exists a, b \in A)$ $((a, b) \in R$ © $(b, a) \in R)$.

Una relación R en un conjunto A es *no simétrica* $\neg ((\forall x, y \in A)((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R))$ que también la podemos expresar como $((\exists x \in A \vee \exists\, y \in A)\ \neg ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R))$ o en la forma $((\exists x \in A) \vee (\exists\, y \in A)\ ((x, y) \in R \wedge \neg (y, x) \in R))$. Algunas propiedades de la misma forma lógica son:

2.2. *Relación lineal o total*

Una relación R definida en A es *lineal o total* si para todo $x, y \in A$, $(x, y) \in R$ o $(y, x) \in R$. En símbolos $(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \vee (y, x) \in$ R). Un elemento $x \in$ A *no es comparable* con otro $y \in$ A si y sólo si $((x, y) \in R \downarrow (y, x) \in R)$. ($\downarrow$ es la flecha de Peirce).

2.3. *Relación antisimétrica estricta*

Llamemos *estrictamente antisimétrica* a una relación R en un conjunto A si satisface la condición $(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \mid ((y, x) \in R))$, donde $\mid$ es la barra de Sheffer; esto equivale a $(\forall x, y \in A)(\neg ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R)))$.

---

[13] Otras formas posibles son $((a, a) \in R$ © $(b, b) \in R)$ o $((a, b) \in R$ © $(a, a) \in R$, por ejemplo.

Una relación *no es estrictamente antisimétrica* si existen elementos $x, y \in$ A tales que $((x, y) \in \mathrm{R} \wedge (y, x) \in \mathrm{R})$, en particular, la relación vacía en cualquier conjunto A es estrictamente antisimétrica.

2.4. *Relación asimétrica*

Una relación R definida sobre un conjunto A, se denomina *asimétrica*, si para todo $x, y \in A$, $(x, y) \in R$ implica $(y, x) \notin R$, en símbolos $(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \rightarrow \neg ((y, x) \in R))$.

Una relación R definida sobre un conjunto A, es *no asimétrica* si $\neg (\forall x, y \in A)((x, y) \in R \rightarrow \neg ((y, x) \in \mathrm{R}))$ o equivalentemente $((\exists x \in A \vee \exists y \in A)\ ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in \mathrm{R}))$.

Teorema 1.6.7: Toda relación R en un conjunto A es asimétrica si y sólo si es antisimétrica estricta.

Prueba: Las siguientes propiedades son equivalentes

$$(\forall x, y \in A)((x, y) \in R \rightarrow \neg ((y, x) \in \mathrm{R}))$$
$$(\forall x, y \in A)(\neg (x, y) \in R \vee \neg ((y, x) \in \mathrm{R}))$$
$$(\forall x, y \in A) \neg ((x, y) \in R \wedge ((y, x) \in \mathrm{R}))$$
$$(\forall x, y \in A)\ ((x, y) \in R \mid ((y, x) \in \mathrm{R})).$$

Teorema 1.6.8: En un conjunto A con n elementos hay 2^{T_n} relaciones simétricas, donde T_n es el n-ésimo número triangular.

Ejemplos

1. La relación idéntica y cualquier subconjunto de ella en cualquier conjunto no vacío A son simétricas pero no totales.
2. En el conjunto de los triángulos del plano euclidiano las relaciones de congruencia y de semejanza de triángulos son simétricas, no lineales y no asimétricas.
3. La relación de perpendicularidad entre las rectas del plano es simétrica, no total y no antisimétrica estricta.
4. En el conjunto de los números enteros la relación *ser inverso aditivo de* es simétrica.
5. En un grupo cualquiera la relación *ser inverso de* es simétrica.
6. En un conjunto vacío la relación vacía es simétrica, asimétrica y total.
7. En un conjunto unitario A = {0}, la relación vacía es simétrica y asimétrica pero no total y la relación unitaria T = {(0, 0)} es simétrica, total pero no asimétrica.
8. El conjunto de partes $\wp$(A×A) es una relación simétrica y total en A.
9. En un conjunto con dos elementos $A = \{0, 1\}$, se pueden definir 3 relaciones asimétricas, $R_0 = \varnothing$, $R_1 = \{(0, 1)\}$ y $R_2 = \{(1, 0)\}$, las cuales se representan en tablas como:

R_0	0	1
0	0	0
0	0	0

R_1	0	1
0	0	1
0	0	0

R_2	0	1
0	0	0
0	1	0

10. En un conjunto con tres elementos se pueden definir 27 relaciones asimétricas, entre las que se cuentan:

R	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	1
2	0	0	0

S	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	0
2	0	1	0

T	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	1
2	1	0	0

11. Sobre un conjunto de cuatro elementos se pueden definir 729 relaciones asimétricas.
12. En un conjunto con n elementos se pueden definir $3^{T_{n-1}}$ relaciones asimétricas.

Para que una relación sea asimétrica es necesario que en la diagonal principal esté ocupada sólo por 0, pues si $x = y$ entonces $(x, x) \in R \rightarrow \neg\, (x, x) \in R$, lo que no puede suceder y por lo tanto $R \cap \Delta_A = \varnothing$. Si las celdas bajo la diagonal principal de la tabla son todos 0, entonces en las celdas de la parte superior puede llenarse con 0 ó 1, pues en este caso el antecedente de la implicación $(x, y) \in R \rightarrow \neg((y, x) \in R))$ es falso, luego el consecuente puede ser falso o verdadero, es decir los elementos de A pueden o no estar relacionados, en el caso de 3 elementos tenemos

R	0	1	2
0	0	_	_
1	0	0	_
2	0	0	0

En este caso hay $2^3 = 8$ maneras de llenar las 3 celdas de la parte superior de la diagonal principal de la tabla. Si A tiene n elementos quedan T_{n-1} celdas para llenar de cualquier forma con 0 y 1, es decir, $2^{T_{n-1}}$ posibilidades. Si sólo una de las celdas bajo la diagonal principal de la tabla tiene uno, por ejemplo la celda (1, 0), en el caso de que A tenga 3 elementos

R	0	1	2
0	0	0	_
1	1	0	_
2	0	0	0

en la celda de (0, 1) debe haber 0. Como en el caso anterior, sólo quedan dos celdas en las que pueden colocarse 0 ó 1, de modo que hay 2^2 maneras de llenar la tabla. Adicionalmente podemos colocar 1 en las celdas (2, 0) y (2, 1) y con esto obtenemos $3 \times 2^2 = 12$ relaciones asimétricas diferentes. En el caso de que haya dos celdas bajo la diagonal principal de la tabla que tienen 1, por ejemplo en las celdas (1, 0) y (2, 0), entonces las celdas (0, 1) y (0, 2) deben tener 0, y sólo queda una celda en la que se escribir 1 ó 0, por lo que hay dos relaciones asimétricas.

R	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	_
2	1	0	0

Como hay tres maneras de ubicar dos 1 en tres celdas, entonces hay otras seis relaciones asimétricas. El último caso es en el que en todas las celdas bajo la diagonal principal hay 1. En este caso, las celdas sobre la diagonal superior han de tener cero y esto da una relación asimétrica. En suma tenemos que en un conjunto con 3 elementos hay $2^3 + 3\times 2^2 + 3\times 2^1 + 2^0 = 27$ relaciones asimétricas.

Vemos una secuencia de potencias de 2 en orden decreciente y un coeficiente que corresponde con la cantidad de posibilidades de colocar 1, dos 1, tres 1, en T_{3-1} celdas que quedan disponibles en la tabla bajo la diagonal principal. En general tenemos que los coeficientes para un conjunto con n elementos son $C_{(m,k)} = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$, donde $m = T_{n-1}$ celdas y k varía de 0 a m.

Conjeturamos que el número de relaciones asimétricas sobre un conjunto con n elementos, es $\sum_{k=0}^{m} \dfrac{m!}{k!(m-k)!} 2^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \dfrac{m!}{k!(m-k)!} 2^{m-k} 1^k = (2+1)^m = 3^m$, donde $m = T_{n-1}$.

Teorema 1.6.9: Una relación R en un conjunto A es simétrica si y sólo R = $R^!$.

Prueba: $(x, y) \in R$ si y sólo si $(y, x) \in R^! = R$.

La composición de relaciones simétricas no necesariamente es simétrica, por ejemplo si X = {0, 1, 2}, las relaciones R = {(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 0)} y S = {(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 2), (2, 0)}, son simétricas en X, pero R o S = {(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 0), (2, 1), (2, 0), (0, 2)} no es simétrica en X pues (1, 2) $\notin$ R o S.

Teorema 1.6.10: Si una relación es simétrica su relación complemento también es simétrica.

Teorema 1.6.11: Si una relación es simétrica (asimétrica) toda restricción de ella también es simétrica (asimétrica).

Teorema 1.6.12: Si una relación es asimétrica la relación complemento de su recíproca es asimétrica.

Teorema 1.6.13: Una relación R en un conjunto A es asimétrica si y solo si $R^!$ lo es.

Teorema 1.6.14: Composición de asimétricas es asimétricas.

Teorema 1.6.15: Si R es una relación en un conjunto A es estrictamente antisimétrica entonces $R \cap \Delta_A = \varnothing$.

Prueba: Si $(x, y) \in R$ entonces $x \neq y$, pues si $x = y$ entonces $(x, x) \in R \wedge (x, x) \in R$, lo que no puede suceder y por lo tanto $R \cap \Delta_A = \varnothing$.

Teorema 1.6.16: Una relación R sobre un conjunto A es asimétrica si y sólo $R \cap R^! = \varnothing$.

2.5. Otras propiedades con dos elementos

Haciendo un giro a las proposiciones incluyendo la igualdad obtenemos nuevas propiedades, entre las más conocidas la

2.5.1. *Relación antisimétrica*

Sea A un conjunto y R una relación sobre el conjunto A, decimos que R es *antisimétrica* si para todo $x, y \in A$ se cumple que si $((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R)$ entonces $(x = y)$, en símbolos $(\forall x, y \in A)\ (((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R)) \rightarrow (x = y))$.

Ejemplos

1. La relación idéntica en un conjunto A y cualquier subconjunto de ésta son antisimétricas.

2. Si $A = \{a, e, i, o , u\}$, las siguientes relaciones son asimétricas, antisimétricas y no totales en A:
   a. $R_1 = \{(a, o), (o, u), (a, e)\}$
   b. $R_2 = \{(o, i), (e, e), (o, u), (e, a)\}$

   No son relaciones antisimétricas en A:
   - $R_3 = \{(a, i), (i, a), (o, o)\}$
   - $R_4 = \{(u, e), (e, e), (e, i), (i, e)\}$

3. La relación de *divisibilidad* entre números naturales N definida por $R = \{(a, b) : (\exists c \in N)(a \times c = b)\}$ es asimétrica, antisimétrica y no lineal en N.
4. La relación vacía en un conjunto vacío es simétrica, asimétrica, antisimétrica y total.
5. Sobre un conjunto unitario $A = \{0\}$, la relación $\varnothing$ es simétrica, asimétrica, antisimétrica pero no total y la relación $\{(0, 0)\}$ es simétrica, antisimétrica, total pero no asimétrica.
6. Sobre un conjunto con dos elementos $A = \{0, 1\}$ se pueden definir 12 relaciones antisimétricas, entre las que se encuentran:

R	0	1
0	1	0
1	0	0

S	0	1
0	1	0
1	1	0

T	0	1
0	1	0
1	0	1

U	0	1
0	0	1
1	0	0

7. En un conjunto con tres elementos $A = \{0, 1, 2\}$ se pueden definir 216 relaciones antisimétricas. Algunas de estas son:

M	0	1	2
0	0	0	1
1	0	1	0
2	0	0	0

P	0	1	2
0	1	0	1
1	0	1	0
2	0	0	0

Q	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	1
2	0	0	0

N	0	1	2
1	1	0	0
1	0	1	0
2	0	1	1

8. En un conjunto A con n elementos hay $3^{T_{n-1}}2^n$ relaciones antisimétricas puesto que a diferencia de las relaciones asimétricas, en las relaciones antisimétricas la diagonal principal puede tener 0 o 1. Esto hace que por cada tabla de las relaciones asimétricas haya 2^n maneras de llenar la diagonal principal. La propiedad antisimétrica no es equivalente a la propiedad asimétrica, por cuanto la primera permite la relación entre un elemento consigo mismo, mientras que en la segunda esto no puede ocurrir. Por ejemplo la relación R en el conjunto $A = \{0, 1, 2\}$, descrita por la siguiente tabla es antisimétrica, pero no asimétrica.

R	0	1	2
0	1	0	1
1	1	1	1
2	0	0	0

En cambio, toda relación asimétrica es antisimétrica pues la afirmación $(\forall x, y \in A)$ $(((x, y) \in \mathrm{R} \wedge (y, x) \in \mathrm{R})) \rightarrow (x = y))$ tiene el antecedente falso en las relaciones asimétricas, por lo tanto es cierta.

La forma lógica de la propiedad antisimétrica sugiere una multiplicidad de propiedades de la forma $(\forall x, y \in A)$ $((x, y) \in \mathrm{R}$ ©$_1$ $(y, x) \in \mathrm{R}$ ©$_2$ $(x = y))$ variando los conectivos ©$_1$ y ©$_2$, por ejemplo

2.5.2. *Relación tricótoma*

Sea A un conjunto y R una relación sobre el conjunto A, decimos que R es *tricótoma* o que cumple la *propiedad de tricotomía* si para todo $x, y \in A$ se cumple $(\forall x, y \in A)$ $((x, y) \in \mathrm{R} \veebar (y, x) \in \mathrm{R} \veebar (x = y))$. Otra forma de presentar la propiedad antisimétrica es diciendo que una relación R en un conjunto A es *antisimétrica* en A si y solo si para todo $x, y \in A$ tales que si $x \neq y$, entonces $((x, y) \in \mathrm{R}$ $\underline{y}$ $(y, x) \notin \mathrm{R}$. en símbolos $(\forall\ x, y \in A)$ $((x \neq y) \rightarrow \neg ((x, y) \in \mathrm{R} \wedge (y, x) \in \mathrm{R}))$, lo que sugiere nuevas variaciones $(\forall x, y \in A)$ $((x \neq y)$ ©$_1$ $((x, y) \in \mathrm{R}$ ©$_2$ $(y, x) \in \mathrm{R}))$.

Teorema 1.6.17: Si una relación R en un conjunto A es antisimétrica su recíproca $\mathrm{R}^!$ también lo es.

Prueba: Sean R una relación antisimétrica sobre un conjunto A y $R^!$ su relación recíproca, si para cada $x, y \in A$, $(x, y) \in R^!$ y $(y, x) \in R^!$, entonces $(y, x) \in R$ y $(x, y) \in R$, como R es antisimétrica, concluimos que $x = y$ y por tanto $R^!$ es antisimétrica.

Teorema 1.6.18: Toda restricción de una relación antisimétrica es antisimétrica.

Teorema 1.6.19: Toda restricción de una relación tricótoma es tricótoma.

Teorema 1.6.20: Una relación R es antisimétrica sobre un conjunto A si y sólo si $R \cap R^! \subseteq \Delta_{A.}$

3. Comparando tres elementos

La más conocida es la propiedad transitiva

3.1 *Relación Transitiva*

Una relación R en un conjunto A es *transitiva* si para todo $x, y, z \in A$ se satisface que si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ entonces $(x, z) \in R$. En símbolos $(\forall x, y, z \in X)(((x, y) \in \mathrm{R}, \wedge, (y, z) \in \mathrm{R}) \rightarrow (x, z) \in \mathrm{R})$.

Ejemplos

1. La relación idéntica y cualquier subconjunto de ella en cualquier conjunto A son transitivas
2. En el conjunto de los triángulos del plano euclidiano las relaciones de congruencia y de semejanza de triángulos son transitivas.
3. En un conjunto vacío y en un conjunto unitario todas las relaciones son transitivas.
4. Si $A = \{a, e, i, o, u\}$, las siguientes relaciones son transitivas en A:
   c. $R_1 = \{(a, a), (a, o), (u, u), (o, u), (a, u)\}$
   d. $R_2 = \{(e, i), (i, i), (o, o), (o, u)\}$.

   No son relaciones transitivas en A:
   - $R_3 = \{(a, i), (i, a), (o, o), (e, e)\}$
   - $R_4 = \{(o, e), (e, u), (o, i)\}$.
5. La relación R de *divisibilidad* en el conjunto de los números enteros Z definida por $R = \{(a, b): \exists c \in \mathrm{Z},\ a \times c = b\}$ es transitiva.
6. La relación *ser descendiente de* entre las personas es transitiva.

El número de relaciones transitivas en un conjunto vacío es 1, en un conjunto unitario es 2, en un conjunto con 2 elementos es 13, con 3 es 171, con 4 es 3994, con 5 es 154303, con 10 es 7307450299510288, pero no conocemos una fórmula general para el número de relaciones transitivas en un conjunto con n elementos.

Teorema 1.6.21: Si una relación R en un conjunto A es transitiva, entonces su relación recíproca $R^!$ también lo es.

Prueba: Sean R una relación transitiva sobre un conjunto A y los elementos x, y, z de A, tales que $(x, y) \in R^!$ y $(y, z) \in R^!$. Por la definición de la relación recíproca $R^!$, $(y, x) \in R$ y $(z, y) \in R$ y como R es transitiva $(z, x) \in R$ y por lo tanto $(x, z) \in R^!$.

La composición de relaciones transitivas no necesariamente es transitivas, por ejemplo si $\mathrm{X} = \{0, 1, 2\}$, las relaciones $\mathrm{R} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 0)\}$ y $\mathrm{S} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2),$

(0, 2), (2, 0)} son transitivas en X, pero R o S = {(0, 0), (1, 1), (2, 2), (0, 1), (1, 0), (2, 1), (2, 0), (0, 2)} no es transitiva en X pues $(1, 0) \in R \circ S$ y (0, 2) R o S pero $(1, 2) \notin R \circ S$.

Teorema 1.6.22: Toda restricción de una relación transitiva *R* en un conjunto A es transitiva.

Teorema 1.6.23: Si una relación R en un conjunto A es transitiva entonces $R \circ R \subseteq R$.

Prueba: Sean $(x, y) \in R \circ R$, entonces existe $z \in R$, tal que $(x, z) \in R$ y $(z, y) \in R$; como R es transitiva entonces $(x, y) \in R$, lo que demuestra que cualquier elemento de $R \circ R$ es también un elemento de *R*, es decir que $(R \circ R) \subseteq R$.

Teorema 1.6.24: Una relación binaria en un conjunto A que es irreflexiva y transitiva también es asimétrica.

Por la forma lógica de la propiedad transitiva las posibilidades de modificaciones se multiplican, aunque sólo nos atendremos a la forma usual de la propiedad transitiva. Para ello vincularemos las tres proposiciones $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ y $(a, c) \in R$), esto lo podemos hacer con dos conectivos dejando fijo el cuantificador $(\forall a, b, c \in X)((a, b) \in R, ©_1, (b, c) \in R ©_2 (a, c) \in R)$. O modificar el orden de las parejas para conseguir:

3.2. *Relación euclidiana*

Una relación *R* en un conjunto *A* es *euclidiana* si para todo $x, y, z \in A$ se satisface que si $(x, y) \in R$ y $(x, z) \in R$ entonces $(y, z) \in R$. En símbolos $(\forall x, y, z \in X)(((x, y) \in R, \wedge, (x, z) \in R) \rightarrow (y, z) \in R)$.

II. Relaciones de A en B

Sea X un conjunto, A y B subconjuntos de X.

3.3. *Relación total a izquierda*

Una relación R de A en B la llamamos[14] *total a izquierda* si para todo *x* en A existe un *y* en B tal que $(x, y) \in R$, en símbolos $(\forall x \in A)(\exists y \in B)((x, y) \in R)$. Una relación total a izquierda en un conjunto A, también la llamamos *extensible* o *serial.*

Teorema 1.6.25: Una relación simétrica, transitiva y extensible es reflexiva.

3.4. *Relación total a derecha o sobreyectiva*
Una relación R de A en B la llamamos *total a derecha* o *sobreyectiva* si para todo *y* en B existe un *x* en A tal que $(x, y) \in R$, en símbolos $(\forall y \in B)(\exists x \in A)((x, y) \in R)$.

[14] Una relación lineal o total en un conjunto A no necesariamente es total a izquierda o a derecha.

3.5. *Relación inyectiva*

Una relación R de un conjunto A en un conjunto B es *inyectiva* si para todo $x, y \in A$ y $z \in B$ si $(x, z) \in R$ y $(y, z) \in R$, implica que $x = y$. En símbolos $(\forall x, y \in A)$ $(\forall z \in B)((x, z) \in R, \wedge, (y, z) \in R) \rightarrow x = y)$.

3.6. *Relación funcional o función parcial*

Una relación R de un conjunto A en un conjunto B es *funcional* o es una *función parcial* si para todo $x \in A$ y $y, z \in B$ si $(x, y) \in R$ y $(x, z) \in R$, implica que $y = z$. $(\forall x \in A)$ $(\forall y, z \in B)$ $((x, y) \in R, \wedge, (x, z) \in R) \rightarrow y = z)$.

3.7. *Función*

Una relación R de un conjunto A en un conjunto B es una *función* si es funcional y total a izquierda

3.8. *Relación biyectiva o función biyectiva*

Una relación R de un conjunto A en un conjunto B es una *relación biyectiva* o *función biyectiva* si es total a izquierda, total a derecha, funcional e inyectiva.

3.9. *Relación inversa de una función*

Una función es *invertible* si y sólo si su relación recíproca es una función, en cuyo caso la relación recíproca es la *función inversa*, la inversa de una función $f : A \rightarrow B$ es la relación $f^{-1} : B \rightarrow A$ cuyo grafo es grafo(f)= $\{(y, x) : y = f(x)\}$. En general esta relación no es una función, si f es inyectiva entonces f^{-1} es una función parcial y si f es sobreyectiva entonces f^{-1} es una función, es decir que si f es biyectiva entonces f^{-1} es una función de B en A también biyectiva, f^{-1} es la *función inversa* de f.

Teorema 1.6.26: La compuesta de funciones parciales es una función parcial.

Teorema 1.6.27: Si S y R son relaciones inyectivas entonces $S \circ R$ es inyectiva

Teorema 1.6.28: Si $S \circ R$ es inyectiva entonces R es inyectiva.

Teorema 1.6.29: Si S y R son relaciones sobreyectivas entonces $S \circ R$ es sobreyectiva

3.10. *Relaciones isomorfas*

Sea X un conjunto, A, B subconjuntos de X, R una relación en A, S una relación en B, y f una función biyectiva de A en B. Decimos que f es un *isomorfismo* de A en B o que R y S son *isomorfas* si y sólo si para todo x, y en A, la condición $(x, y) \in R$ es equivalente a $(f(x), f(y)) \in S$. Si A = B entonces f es un *automorfismo* de A en A.

Teorema 1.6.30

La relación de isomorfismo entre relaciones es una relación de equivalencia

Referencia

M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev, *Monoids, Acts and Categories with Applications to Wreath Products and Graphs*, De Gruyter Expositions in Mathematics vol. 29, Walter de Gruyter, 2000,